



Antero Miguel Esteves Sequeira

Licenciado em Ciências da Engenharia

Elementos finitos híbridos-Trefftz de tensão para problemas de elasticidade plana

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Civil – Perfil de Estruturas

Orientador: Professor Doutor Dragos Ionuț Moldovan

Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa

Co-orientador: Professor Doutor Corneliu Cismașiu

Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade

Nova de Lisboa

Júri:

Presidente: Professor Doutor Rodrigo de Moura Gonçalves

Arguente: Professora Doutora Ildi Cismașiu

Vogal: Professor Doutor Dragos Ionuț Moldovan



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Maio, 2017

Copyright © Antero Miguel Esteves Sequeira, Faculdade de Ciências e Tecnologia,
Universidade Nova de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Resumo

O presente trabalho tem como objectivo desenvolver uma ferramenta computacional que utiliza elementos finitos híbridos-Trefftz no seu modelo de tensão para resolver problemas elastoestáticos envolvendo estados planos de tensão ou de deformação.

Os programas de cálculo existentes utilizam formulações que se baseiam nos elementos finitos conformes de deslocamentos (convencionais). Estes elementos satisfazem exactamente as condições cinemáticas tanto nos elementos como nas suas fronteiras. Esta opção resulta numa precisão das soluções dos campos de deslocamentos geralmente bastante satisfatória. Contudo, a precisão dos campos de tensões é inferior, o que coloca certas limitações se a correcta recuperação dos campos de tensões for importante para o utilizador. Para ultrapassar este obstáculo, uma das escolhas disponíveis são os elementos finitos híbridos-Trefftz. Nesta formulação, aproximam-se de forma independente os campos de tensões no domínio dos elementos finitos, e os deslocamentos nas suas fronteiras essenciais (Neumann e interelementar). As funções de aproximação utilizadas nos elementos são obrigadas a satisfazer localmente todas as equações do domínio, não garantindo, no entanto, a compatibilidade nas fronteiras cinemáticas. As soluções obtidas desta forma, apesar de não serem nem localmente compatíveis, nem localmente equilibradas, apresentam um bom equilíbrio entre a qualidade dos campos de tensões e deslocamentos.

De forma a validar o programa desenvolvido, este é utilizado para analisar uma estrutura simples com solução analítica conhecida, comparando também os seus resultados com os obtidos utilizando um programa de cálculo automático que usa elementos conformes de deslocamento. Observou-se que a formulação de elementos finitos híbridos-Trefftz obtém melhores resultados com um menor número de graus de liberdade comparativamente à formulação convencional. O programa desenvolvido foi ainda aplicado a três casos de estudo mais complexos, onde se testou a convergência dos resultados sob refinamentos 'h' e 'p'. Com a análise concluiu-se que o refinamento 'p' (das bases de aproximação) é mais eficaz que o refinamento 'h' (da malha de elementos finitos). Concluiu-se ainda que os elementos finitos híbridos-Trefftz apresentam uma boa eficácia na resolução de problemas com geometria irregular, descontinuidades e concentrações de tensões.

Palavras-chave: Metodo dos elementos finitos, Problemas elastoestáticos planos, Elementos finitos híbridos-Trefftz, Modelo de tensão

Abstract

The objective of this work is to develop a computational tool that uses the stress model of the hybrid-Trefftz finite element formulation to solve elastostatic problems under plane stress and plane strain conditions.

In commercially available finite element software, the formulations are generally based on conforming displacement (conventional) finite elements. These elements satisfy exactly the compatibility equations both in the elements and on their boundaries. This generally leads to an accurate recovery of the displacement field. However, their use generally yields stress field approximations with inferior quality. In order to overcome this drawback, hybrid-Trefftz finite elements are used in this work. The formulation develops from the independent approximation of the stress field in the domain of the elements, and of the displacement fields on their essential boundaries. The approximation functions of the hybrid-Trefftz elements are required to satisfy all domain equations, but do not guarantee the compatibility on the kinematic boundaries. The solutions obtained in this way, despite being neither locally compatible nor locally equilibrated, present a better balance between the quality of the stress and displacements fields.

In order to validate the software developed in this work, it is used to analyse a simple structure with a known analytical solution. The performance of the program is also compared with that of conventional finite elements, for the same problem. It is concluded that the hybrid-Trefftz formulation is able to yield results with superior quality, using less degrees of freedom.

This program is also used to solve three structural problems of higher complexity, where the convergence of the results under ' h ' (mesh) and ' p ' (approximation basis) refinements is tested. It is concluded that larger convergence rates are achievable using ' p ' refinements. It is also concluded that the finite elements are highly effective in solving problems with irregular geometry, geometrical discontinuities and stress concentrations.

Keywords: Finite elements method, Elastostatic plane problems, Hybrid-Trefftz finite elements, Stress model

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer ao meu orientador, Professor Doutor Ionuț Dragos Moldovan, pela paciência, ajuda, disponibilidade e dedicação durante todo o desenvolvimento deste trabalho. Gostaria, também, de agradecer ao Professor Doutor Corneliu Cismașiu pela oportunidade de poder desenvolver esta dissertação. Gostaria, por fim, de agradecer todo o apoio e incentivo que recebi dos meus pais.

Índice

Resumo.....	i
Abstract	iii
Agradecimentos	v
Índice	vii
Lista de figuras	xi
Lista de tabelas.....	xiii
Lista de símbolos	xv
1. Introdução	1
1.1. Motivação.....	1
1.2. Elementos finitos.....	2
1.3. Estado da arte	3
1.4. Organização do trabalho	5
2. Apresentação do Problema.....	7
2.1. Introdução	7
2.2. Hipóteses simplificativas	7
2.3. Condições de equilíbrio.....	8
2.4. Condições de compatibilidade	10
2.5. Relações constitutivas.....	11
2.6. Equação de Navier.....	13
2.7. Condições de fronteira	13
3. Elementos finitos híbridos-Trefftz.....	15
3.1. Introdução	15
3.2. Malhas e fronteiras interelementares	16
3.3. Elemento finito híbrido de tensão	17
3.3.1. Bases de aproximação	17
3.3.2. Equação no domínio.....	17
3.3.3. Equação na fronteira	18
3.3.4. Sistema resolutivo	19

3.4.	Elementos híbridos-Trefftz de tensão.....	20
3.4.1.	Funções de aproximação.....	20
3.4.2.	Equação no domínio.....	23
3.4.4.	Sistema resolutivo	24
3.4.5.	Indeterminação estática e cinemática	25
3.5.	Energia de deformação	26
4.	Implementação computacional	27
4.1.	Introdução	27
4.2.	Sistemas de referência	27
4.3.	Pré-processamento	28
4.3.1.	Geradores de malha	29
4.3.2.	Dados geométricos e topológicos	30
4.3.3.	Estruturas de dados.....	31
4.4.	Processamento.....	33
4.4.1.	Descrição das bases.....	33
4.4.2.	Mapeamento do sistema	34
4.4.3.	Integração numérica	35
4.4.4.	Resolução do sistema.....	36
4.5.	Pós-processamento.....	37
4.5.1.	Modos de corpo rígido	38
4.5.2.	Campos de soluções.....	39
5.	Resultados e discussão.....	41
5.1.	Introdução	41
5.2.	Validação do programa	42
5.2.1.	Viga de Timoshenko	42
5.2.3.	Comparação dos elementos finitos híbridos -Trefftz com os elementos convencionais.....	46
5.3.	Casos de estudo mais complexos.....	51
5.3.1.	Placa em 'L'	51
5.3.2.	Painel de Cook.....	57
5.3.3.	Placa com orifício circular	63
6.	Conclusões e desenvolvimentos futuros.....	67
6.1.	Conclusões.....	67
6.2.	Desenvolvimentos futuros	67

Bibliografia	69
--------------------	----

Lista de figuras

Figura 2.1: Domínio, fronteiras de Neumann e Dirichlet.	7
Figura 2.2: Forças actuantes no rectângulo elementar	9
Figura 2.3: Deslocamento dos segmentos dx e dy na forma deformada.....	11
Figura 2.4: Superfície do corpo actuada por forças externas.	14
Figura 3.1: Elementos finitos e as suas fronteiras.....	16
Figura 4.1: Sistemas de referência.	28
Figura 4.2: Gerador de malha regular. Exemplo de malha de 4 elementos e 12 fronteiras.....	29
Figura 4.3: Gerador de malha não regular. Exemplo de malha não regular de 6 elementos e 13 fronteiras.....	30
Figura 4.4: Mapeamento das matrizes de flexibilidade.	34
Figura 4.5- Mapeamento das matrizes A_h e A_b das fronteiras essenciais de um modelo de 2 elementos e 7 fronteiras.	35
Figura 5.1: Viga de Timoshenko.	42
Figura 5.2: Viga de Timoshenko: Deformação da viga em $X = L$ [37].....	44
Figura 5.3: Viga de Timoshenko: Malhas utilizadas no programa de elementos finitos híbridos-Trefftz.	45
Figura 5.4: Viga de Timoshenko: Erro da energia de deformação (ε_T) em função dos graus de liberdade (N)	45
Figura 5.5: Viga de Timoshenko: Malhas utilizadas no programa SAP2000.	46
Figura 5.6: Viga de Timoshenko: Pontos onde se comparam as soluções.....	47
Figura 5.7: Viga de Timoshenko: Convergência dos campos σ_x , τ_{xy} , u_x e u_y	48
Figura 5.8: Viga de Timoshenko: Campos de tensões previstos pelos elementos finitos híbridos-Trefftz.	49
Figura 5.9: Viga de Timoshenko: Campos de tensões previstos pelos elementos finitos convencionais.....	49
Figura 5.10: Viga de Timoshenko: Campos de deslocamento previstos pelos elementos finitos híbridos-Trefftz.....	50
Figura 5.11: Viga de Timoshenko: Campos de deslocamento previstos pelos elementos finitos convencionais.....	50
Figura 5.12: Placa 'L'.	52
Figura 5.13: Placa em 'L': malhas de elementos elementos finitos híbridos-Trefftz.....	53
Figura 5.14: Placa em 'L': Erro da energia de deformação em função do número total de graus de liberdade.	53
Figura 5.15: Placa em 'L': Campos de tensões.....	55
Figura 5.16: Placa em 'L': Campos de deslocamento.....	56
Figura 5.17: Painel de Cook.....	57
Figura 5.18: Painel de Cook: malhas de elementos finitos híbridos-Trefftz.	58
Figura 5.19: Painel de Cook: Variação da tensão máxima no ponto B (σ_{\max}) em função do número total de graus de liberdade (N)	59

Figura 5.20: Painei de Cook: Variação do deslocamento vertical no ponto A (u_y) em função do número total de graus de liberdade (N)	60
Figura 5.21: Painei de Cook: Campos de tensões.	61
Figura 5.22: Painei de Cook: Campos de deslocamento.	62
Figura 5.23: Placa com orifício circular.	63
Figura 5.24: Placa com orifício circular: malhas de elementos finitos híbridos-Trefftz.	64
Figura 5.25: Placa com orifício circular: Energia de deformação (E) em função do número total de graus de liberdade (N)	64
Figura 5.26: Placa com orifício circular: Campos de tensões.	65
Figura 5.27: Placa com orifício circular: Campos de deslocamento.....	66

Lista de tabelas

Tabela 5.1: Viga de Timoshenko: Refinamentos ρ'	45
Tabela 5.2: Comparação dos valores dos campos de tensões e deslocamentos recuperados pelos elementos finitos com a solução analítica de Timoshenko.....	48

Lista de símbolos

Símbolos gerais

\emptyset : Conjunto vazio

\cup : União de conjuntos

\cap : Intersecção de conjuntos

\mathbf{V} : Domínio da estrutura ou do elemento

Γ : Fronteira

Γ_{σ} : Fronteira de Neumann

Γ_u : Fronteira de Dirichlet

dx, dy : Comprimento diferencial nas componentes dos eixos referencial cartesiano

α : Valor de indeterminação estática

β : Valor de indeterminação cinemática

E : Energia de deformação

ε_{\square} : Erro relativo de \square

\square^T : Transposta de \square

$d\square$: Diferencial de \square

ϕ_h, ϕ_b : Função potencial harmónica e bi-harmónica

Z_m : Polinómios de Chebyshev de grau m

N_D : número de equações de compatibilidade no sistema resolutivo

N_{Γ} : número de equações de equilíbrio no sistema resolutivo

n_D : Ordem das funções de aproximação incluídas na base do domínio

n_{Γ} : Grau dos polinómios incluídos na base da fronteira essencial

W_i : Funções de peso

Operadores

D : Operador diferencial de equilíbrio

D^* : Operador diferencial de compatibilidade

∇ : Operador gradiente

∇^2 : Operador Laplaciano

$\tilde{\nabla}$: Operador rotacional

Matrizes e vectores

u : Campo de deslocamentos

ε : Campo de deformações

σ : Campo de tensões

t_Γ : Força aplicada na fronteira de Neumann de um corpo

u_Γ : Deslocamento imposto na fronteira de Dirichlet de um corpo

ψ_h, ψ_b : Bases de aproximação de deslocamentos

E_h, E_b : Bases de aproximação das deformações

S_h, S_b : Bases de aproximação das tensões

A : matriz de fronteira

X : vector das tensões generalizadas

Y : vector dos deslocamentos generalizados

\bar{u}_Γ : Vector dos deslocamentos impostos na fronteira de Dirichlet do elemento finito

\bar{t}_Γ : Vector das forças aplicadas na fronteira Neuman do elemento finito

n : normal unitária à fronteira

Caractrísticas do material

E : Módulo de Young

ν : Coeficiente de Poisson

G : Módulo de distorção

I : Momento de inércia

1. Introdução

1.1. Motivação

A Engenharia Civil tem como um dos principais objectivos garantir a segurança estrutural da forma mais económica possível. Para alcançar este objectivo torna-se assim necessário prever os estados de tensões e deslocamentos que acontecem numa estrutura, previamente à sua construção. Para tornar possível esta previsão, foram desenvolvidos modelos matemáticos de diversos níveis de complexidade para modelar o comportamento estrutural, sendo um dos mais utilizados baseado na teoria da elasticidade. Esta teoria formula matematicamente as relações que existem entre os campos de tensão, deslocamento e deformação em corpos elásticos sujeitos a cargas aplicadas e restrições de deslocamentos. As equações que fundamentam esta teoria advêm de autores como Hooke, que desenvolveu a lei constitutiva das matérias, Cauchy, que estabeleceu a equação de equilíbrio, Poisson, que define um coeficiente que relaciona as deformações nas direcções longitudinal e transversal à solicitação e Navier, que apresenta o equilíbrio diferencial expresso através dos deslocamentos. Através da resolução das equações governativas da teoria da elasticidade, seria, em princípio, possível determinar os estados de deslocamento, deformação e tensão em todos os pontos da estrutura. Contudo, a resolução analítica das equações apenas é possível para problemas muito simples, sendo que em problemas de maior complexidade a opção mais comum é procurar soluções aproximadas.

Os avanços das ferramentas computacionais têm facilitado o desenvolvimento de técnicas numéricas para a resolução aproximada das equações da teoria de elasticidade, abrindo a possibilidade de analisar estruturas de elevado grau de complexidade. Um exemplo destas técnicas, que tira grande partido do cálculo automático, é o método dos elementos finitos.

No presente trabalho é desenvolvida uma formulação de elementos finitos híbridos-Trefftz no seu modelo de tensões, para resolver problemas elastoestáticos em estado plano de tensão ou deformação. Este trabalho complementa uma plataforma computacional mais abrangente, implementada em ambiente Matlab, que utiliza elementos finitos híbridos para resolver problemas acústicos, térmicos e estruturais. O objectivo desta plataforma é colocar as potencialidades dos elementos finitos híbridos e, principalmente, híbridos-Trefftz, à disposição da comunidade científica, facilitando a sua utilização através da inclusão de interfaces gráficas intuitivas e procedimentos de refinamento automático. Note-se que não existe, correntemente, nenhuma outra plataforma computacional publicamente disponível que utilize elementos finitos híbridos-Trefftz.

1.2. Elementos finitos

O método dos elementos finitos parte da divisão do domínio de um corpo em subdomínios. Dentro de cada subdomínio (denominado de elemento finito), os campos desconhecidos são aproximados através da combinação linear de um conjunto de funções (funções de aproximação), cujos pesos na solução passam a ser as incógnitas do problema. Assim, para a completa determinação das soluções deixa de ser necessária a sua avaliação num número infinito de pontos, e passa a ser suficiente conhecer um número finito de pesos correspondentes às funções de aproximação incluídas na base.

A variante mais utilizada do método de elementos finitos são os elementos conformes de deslocamentos (elementos convencionais). Estes elementos satisfazem exactamente as condições cinemáticas tanto nos elementos (equações de compatibilidade) como nas suas fronteiras (equações de continuidade dos deslocamentos). No entanto, as condições estáticas não são respeitadas exactamente por estes elementos. Como consequência de respeitar as condições cinemáticas, a precisão das soluções dos campos de deslocamentos é geralmente bastante satisfatória. Por outro lado, a precisão dos campos de tensões é inferior, o que coloca certas limitações, pois no processo de dimensionamento estrutural existe geralmente maior interesse no conhecimento das tensões do que dos deslocamentos.

Devido às limitações dos elementos conformes de deslocamentos, surgiu a necessidade de desenvolver outras formulações que supram este constrangimento, surgindo assim as formulações híbridas, nomeadamente híbridas-mistas, híbridas (puras) e híbridas-Trefftz. As formulações híbridas diferem muito entre si e existe ainda um certo nível de equívoco do ponto de vista da terminologia. Neste documento a nomenclatura utilizada é a estabelecida na referência [1], típica da investigação desenvolvida no grupo de análise de estruturas do Instituto Superior Técnico. Estas formulações híbridas têm como vantagem a possibilidade de se poder escolher livremente a ordem das funções de aproximação, assim como de se poder refinar independentemente elementos e fronteiras. Apesar de estas formulações serem mais flexíveis do que as convencionais, são também mais difíceis de trabalhar para um utilizador inexperiente, que poderá ter dificuldades em escolher correctamente as ordens das bases de aproximação em cada elemento e fronteira essencial (Neumann e interior) para além da escolha do refinamento da malha, como nos elementos convencionais. Os elementos finitos híbridos também diferem dos convencionais devido ao facto de não serem nem localmente (i.e, em todos os pontos) compatíveis nem localmente equilibrados, sendo que os elementos convencionais são localmente compatíveis. Finalmente, na formulação híbrida, as funções de aproximação são independentes dos nós dos elementos e as bases são estritamente hierárquicas, o que significa que a adição de uma nova função a uma base de aproximação não obriga à redefinição das outras funções. Nenhuma destas propriedades é partilhada pelos elementos conformes de deslocamento.

Das três variantes de formulações híbridas mencionadas anteriormente, a formulação usada neste trabalho é a híbrida-Trefftz. A característica fundamental da formulação híbrida-Trefftz é o facto das funções de aproximação serem soluções exactas das equações governativas no domínio dos elementos. Por essa razão, as bases de aproximação são talhadas especificamente para cada problema individual e contêm informação física acerca do fenómeno modelado. Isso faz com que os elementos finitos híbridos Trefftz apresentem níveis

de convergência extremamente elevados e muito reduzida sensibilidade à distorção da malha e incompressibilidade do material [2].

1.3. Estado da arte

O crescente desenvolvimento do conhecimento e dos meios tecnológicos na área da Mecânica Computacional dos últimos anos, tem permitido a utilização de modelos numéricos mais complexos na análise estrutural em Engenharia Civil. Muitos dos problemas estruturais têm sido resolvidos através do método dos elementos finitos. Os conceitos deste método surgiram numa era ainda prévia à digital. As primeiras metodologias matemáticas que permitiram o desenvolvimento deste método datam do século XX na década de 40, com o trabalho de Courant [3], onde surgem os primeiros processos de discretização de meios contínuos com elementos triangulares. Na década de 50, Turner, Clough, Martin e Topp [4], trabalharam num projecto para a empresa Boeing, com base num método de análise estrutural, que modelava painéis de aeronaves a partir de elementos triangulares capazes de cobrir toda a superfície de cada peça. Em 1960, Clough [5] propõe as nomenclaturas mais tarde adoptadas pelo método dos elementos finitos, e os procedimentos necessários para a sua implementação computacional. Contudo, o principal impulsionador na projecção do método dos elementos finitos como um método geral e utilizável para os mais diversos ramos da engenharia e não relacionado somente à mecânica dos sólidos foi Zienkiewicz [6]. De notar que entre os autores acima mencionados ocupam também lugares de destaque os trabalhos de Synge [7], e Bank [8].

Para apoiar a implementação computacional do método, foram criados geradores de malhas automáticos, que não são mais que algoritmos capazes de gerar malhas de elementos finitos, a partir da informação geométrica do domínio e das dimensões máximas recomendadas dos elementos, como no trabalho pioneiro de Zienkiewicz e Phillips [9], e também no trabalho do grupo de Análise de Estruturas do Departamento de Engenharia Civil do Instituto Superior Técnico [10].

No trabalho aqui apresentado, os elementos aplicados correspondem à formulação de elementos finitos híbridos-Trefftz, cujas bases teóricas foram estabelecidas por Trefftz [11], em 1926. Na altura, a aplicação directa do método de Trefftz não foi possível, por causa da indisponibilidade dos meios computacionais que a mesma requeria. Com o surgimento e desenvolvimento destes meios, a ideia de Trefftz foi retomada num artigo publicado no final da década de 70 por Jiroušek [12], onde o autor apresenta quatro formulações híbridas-Trefftz aplicáveis à resolução de problemas mecânicos. Depois de estabelecidas as formulações híbridas-Trefftz, surgem varias derivações do método, a maioria na década de 80, destacando-se aqui a obra de Zielinski [13] e de Herrera [14], que estabeleceu as bases matemáticas desta classe de métodos. Além destes trabalhos surgem outros com grande relevância científica, nomeadamente de Jin et al [15], Leitão [16], Jirousek [17, 18, 19] e Freitas [20, 21, 22].

O método de Trefftz aplicado no presente trabalho, desenvolvido pela abordagem típica de Freitas, propõe que a continuidade dos deslocamentos nas fronteiras seja imposta de forma fraca. A consequência directa desta opção é que os pesos das funções de aproximação deixam de ter significado físico. Em contrapartida, a escolha das funções a incluir na base de aproximação torna-se muito mais flexível.

No que toca a materiais monofásicos com comportamento elástico, elementos finitos híbridos-Trefftz, em estados planos de tensão e deformação, foram desenvolvidos por Freitas [21]. Os elementos apresentaram elevados índices de convergência sob refinamento 'p', tanto no domínio como nas fronteiras, e uma baixa sensibilidade à distorção da malha. As formulações híbridas-Trefftz foram posteriormente aplicadas a problemas tridimensionais por Freitas e Bussamra [22]. Os mesmos autores aplicaram os elementos finitos híbridos-Trefftz a problemas elastoplásticos [23], concluindo que neste caso, alguns dos termos presentes no sistema resolutivo não podem ser definidos por integrais de fronteira, como sucede quando aplicados a problemas elásticos. Contudo, a informação física contida na base de aproximação destes elementos continua a garantir resultados convergentes e estáveis.

A extensão das formulações não-convencionais a problemas elastodinâmicos foi efectuada por Freitas e Wang [24]. Freitas e Cismasiu [25] desenvolveram elementos finitos híbridos-Trefftz de deslocamento para problemas harmónicos, focando-se maioritariamente na modelação de meios semi-infinitos, utilizando fronteiras absorventes e elementos infinitos.

A formulação dos elementos híbridos-Trefftz para a análise de estados planos de deformação para solos saturados foi desenvolvida por Freitas e Moldovan [26, 27]. Uma nova técnica de integração no tempo, relatada pela primeira vez na referência [28], foi utilizada. Esta técnica tem o mérito de gerar problemas discretizados no tempo definidos por equações espectrais, independentemente das funções que são utilizadas na base do tempo, possibilitando assim o uso da mesma formulação de elementos finitos no espaço para problemas harmónicos, periódicos e transitórios. As propriedades de convergência e robustez destes elementos foram estudadas em detalhe por Moldovan e Freitas [2]. Foi demonstrado que os elementos híbridos-Trefftz não necessitam de calibrar a dimensão principal do elemento para o comprimento de onda da onda de frequência mais alta considerada na análise. Além disso, os elementos híbridos-Trefftz são naturalmente robustos a problemas envolvendo meios quase incompressíveis. A formulação de elementos híbridos-Trefftz para problemas poroelastostáticos envolvendo solos saturados foi desenvolvida na referência [29].

No caso de problemas onde ocorrem altos gradientes dos campos das soluções, como por exemplo, nos casos dos pontos de singularidade das tensões provocados pela presença de forças concentradas ou descontinuidades geométricas, as bases de aproximação dos elementos finitos híbridos-Trefftz podem ser enriquecidas com funções específicas, que facilitam a recuperação dos pontos de singularidade. Nos trabalhos do Jirousek [17, 30] são apresentados exemplos deste efeito a problemas com concentração de tensões em aberturas circulares. Na mesma área, referem-se ainda os trabalhos desenvolvidos por Cismasiu [31] e Piltner [32], onde as funções de enriquecimento são aplicadas a problemas envolvendo cargas concentradas e fendas em cunha.

1.4. Organização do trabalho

O presente trabalho é dividido em seis capítulos.

No segundo capítulo apresenta-se o problema que será analisado, e os conceitos teóricos atribuídos ao mesmo. Apresentam-se, igualmente, as hipóteses simplificativas que são adoptadas, juntamente com as equações governativas no domínio e fronteira do corpo.

No terceiro capítulo abordam-se os elementos finitos híbridos de tensão introduzindo as aproximações no domínio e fronteira próprias à formulação destes elementos e a sua equação governativa. Posteriormente, particularizam-se as funções de aproximação e o sistema governativo para o caso dos elementos finitos híbridos-Trefftz. Definem-se os conceitos de indeterminação estática e cinemática do problema. Por fim, apresenta-se o conceito de energia de deformação e a sua aproximação pelos elementos finitos híbridos-Trefftz.

No quarto capítulo é abordada a implementação computacional dos elementos finitos híbridos-Trefftz de tensão para problemas de elasticidade plana. Apresentam-se os referenciais utilizados para a introdução de dados, a definição das funções de aproximação, o processo de determinação da solução, e sua representação gráfica. Apresentam-se as diversas fases do funcionamento do programa computacional desenvolvido. São listadas as várias estruturas de dados utilizadas pelo programa, a alocação de memória para guardar o sistema resolutivo, o processo de integração numérica, e o procedimento que o programa segue para resolver o sistema. Por fim, são apresentados os modos de corpo rígido, e a forma como o programa constrói a solução para poder representar graficamente os campos.

No quinto capítulo é apresentado o processo de validação do programa computacional desenvolvido e avalia-se o desempenho dos elementos híbridos-Trefftz, através de análises de erros e processos de convergência, comparando os resultados obtidos por esta formulação com soluções analíticas conhecidas, programas de cálculo automático de elementos finitos convencionais e resultados publicados noutras obras científicas por diversos autores.

No sexto, e último capítulo, são apresentadas as conclusões deste trabalho e possíveis desenvolvimentos futuros.

2. Apresentação do Problema

2.1. Introdução

Neste capítulo pretende-se definir o problema de um corpo elástico sujeito a forças aplicadas e deslocamentos impostos na sua superfície. O corpo é composto por um domínio V e delimitado por uma fronteira Γ que é dividida em duas partes, a fronteira de Neumann (Γ_σ), onde são aplicadas as forças t_Γ , e a fronteira de Dirichlet (Γ_u), onde são impostos os deslocamentos u_Γ . Conforme apresentado na Figura 2.1 as fronteiras Γ_σ e Γ_u são complementares, isto é, $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ e $\emptyset = \Gamma_u \cap \Gamma_\sigma$. O objectivo do problema é determinar os campos de deslocamentos, deformações e tensões provocadas pelas acções e restrições aplicadas, em todos os pontos do corpo.

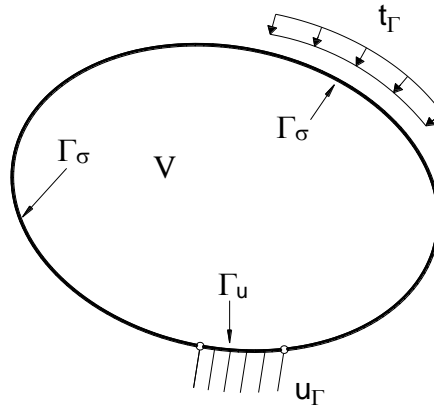


Figura 2.1: Domínio, fronteiras de Neumann e Dirichlet.

Na primeira parte deste capítulo apresentam-se as hipóteses simplificativas do problema. De seguida introduzem-se as equações governativas no domínio, e as condições a aplicar nas fronteiras de Neumann e Dirichlet.

No domínio, são apresentadas as condições de equilíbrio, compatibilidade e as relações constitutivas. A condição de equilíbrio expressa o equilíbrio entre as tensões às quais é sujeito um elemento diferencial dum corpo. A condição de compatibilidade apresenta a relação entre os campos de deformações e deslocamentos no corpo. Finalmente, as relações constitutivas reflectem a proporcionalidade entre as tensões e as deformações.

Quanto às condições de fronteira, apresentam-se as condições de equilíbrio entre as forças aplicadas na fronteira de Neumann e as tensões que as mesmas provocam e a imposição dos deslocamentos impostos na fronteira de Dirichlet.

2.2. Hipóteses simplificativas

A modelação matemática de fenómenos físicos baseia-se geralmente na simplificação dos mesmos através da adopção de certas hipóteses simplificativas.

As hipóteses simplificativas usadas neste trabalho são as seguintes:

- O material é homogéneo e uniforme, ou seja, as propriedades do material são idênticas em todos os pontos do corpo;
- O domínio é formado por um ou mais materiais isotrópicos;
- As acções aplicadas ao corpo são estáticas;
- Os materiais que compõem o corpo têm um comportamento elástico linear (linearidade física), ou seja, apresentam relações lineares entre tensões e deformações;
- São válidas as hipóteses da linearidade geométrica, isto é, admite-se que as deformações e os deslocamentos são muito pequenos, face à menor dimensão do corpo. Por consequência, assume-se que é aceitável escrever as equações governativas na configuração não deformada do corpo.

Para além destas hipóteses, são ainda usadas neste trabalho, com o objectivo de simplificar a formulação e a implementação computacional, as seguintes simplificações,

- O problema é redutível a um estado de elasticidade plana (de deformação ou de tensão);
- Considera-se que o peso próprio do material é desprezável face às forças exteriores aplicadas.

Relativamente à simplificação da elasticidade plana, temos:

- Um estado plano de deformação, quando a deformação principal numa determinada direcção (denominada aqui de z) é nula, ou seja, $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Um exemplo típico desta situação é um corpo de secção transversal constante, com a dimensão em z muito superior às outras.
- Um estado plano de tensão, quando a tensão principal numa determinada direcção (z) é nula, ou seja, $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Um exemplo típico desta situação é uma placa fina apenas sujeita a forças no plano (xy).

2.3. Condições de equilíbrio

No âmbito da elasticidade plana, o estado de tensão em cada ponto do meio pode ser caracterizado por um tensor σ ,

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

onde, σ_x e σ_y representam as tensões normais que actuam em facetas perpendiculares aos eixos x e y , respectivamente, e τ_{xy} as tensões tangenciais que actuam no plano (xy).

Para escrever as condições de equilíbrio de um elemento diferencial, $dx \times dy$ do corpo sujeito às tensões actuantes nas suas facetas, considera-se o estado de tensão genérico representado na Figura 2.2.

Nas facetas 1 e 2 do elemento diferencial, estão a actuar as tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} , assumidas como sendo uniformemente distribuídas nas mesmas, e nas facetas 3 e 4 estão a actuar as mesmas tensões, mais os seus acréscimos diferenciais, $d\sigma_x$, $d\sigma_y$ e $d\tau_{xy}$.

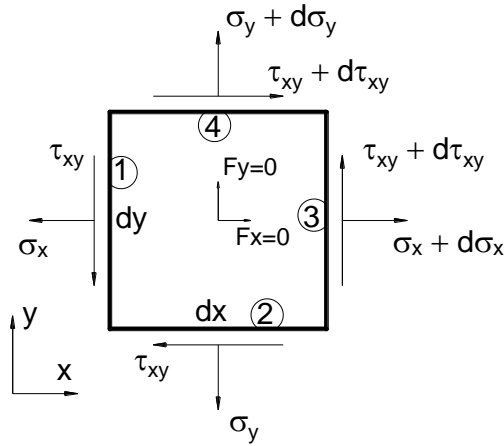


Figura 2.2: Forças actuantes no rectângulo elementar

Os acréscimos das tensões são dados por,

$$\left\{ \begin{array}{l} d\sigma_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \\ d\sigma_y = \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \\ d\tau_{xy} = \frac{\partial d\tau_{xy}}{\partial x} dx \text{ (na faceta 3)} \\ d\tau_{xy} = \frac{\partial d\tau_{xy}}{\partial y} dy \text{ (na faceta 4)} \end{array} \right. \quad (2.2)$$

O equilíbrio das forças que actuam nas direcções x e y exige que,

$$\left\{ \begin{array}{l} d\sigma_x dy + d\tau_{xy} dx = 0 \\ d\sigma_y dx + d\tau_{xy} dy = 0 \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Substituindo nas equações de equilíbrio (2.3) os acréscimos de tensão pelos seus valores indicados nas definições (2.2) e eliminando o produto $dx dy$ que aparece em todas as parcelas, obtém-se a forma final das equações de equilíbrio,

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

As equações de equilíbrio (2.4) do elemento infinitesimal no interior do domínio V podem ser escritas matricialmente na forma,

$$\mathbf{D} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

onde \mathbf{D} é o operador de divergência generalizado,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

2.4. Condições de compatibilidade

Os deslocamentos de cada ponto do domínio V podem ser representados por um vector \mathbf{u} cujas componentes representam os deslocamentos segundo as direcções do sistema de eixos Cartesiano,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

O estado de deformação em cada ponto do meio é caracterizado por um tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ em que, ε_x e ε_y são as extensões nos respectivos eixos, isto é, a variação de comprimento dos segmentos diferenciais dx e dy a dividir pelos respectivos comprimentos iniciais, e γ_{xy} representa a diminuição do ângulo inicialmente recto entre os segmentos dx e dy , sendo denominado por distorção.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Na Figura 2.3 apresenta-se um exemplo do deslocamento dos segmentos dx e dy na forma deformada do corpo.

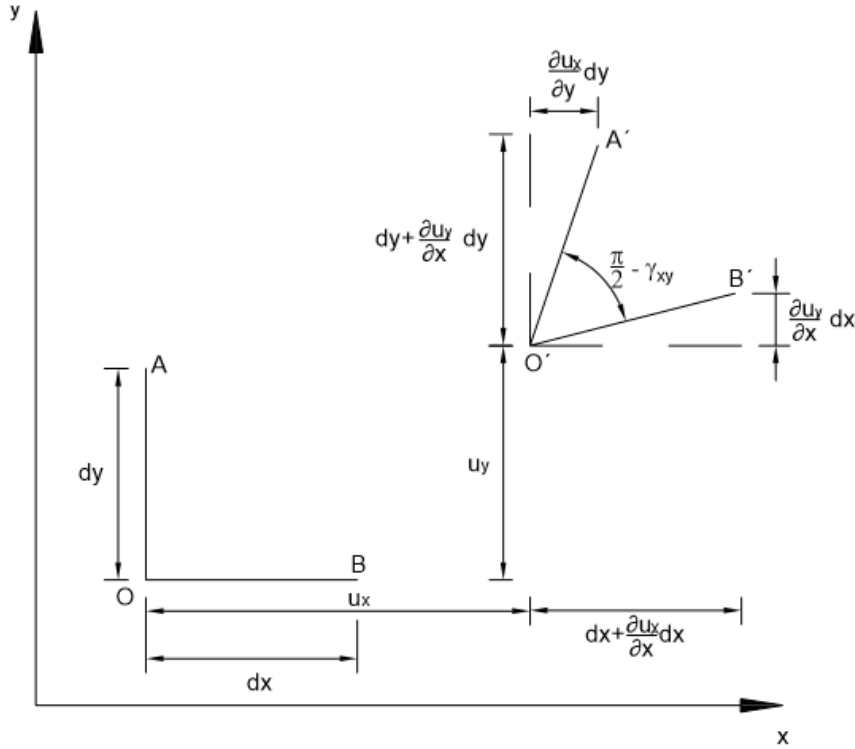


Figura 2.3: Deslocamento dos segmentos dx e dy na forma deformada

Com base na Figura 2.3 é possível definir as extensões como,

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{cases} \quad (2.9)$$

As relações entre as deformações e os deslocamentos podem ser escritas matricialmente na forma,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^* \mathbf{u} \quad (2.10)$$

onde \mathbf{D}^* é o operador diferencial de compatibilidade. Note-se que $\mathbf{D}^T = \mathbf{D}^*$ em coordenadas Cartesianas e num problema linear.

2.5. Relações constitutivas

As relações constitutivas estabelecem as leis que relacionam os campos de tensões e de deformações. Podem ser apresentadas em termos de rigidez, isto é, expressando as tensões em função das deformações ou em termos de flexibilidade, ou seja, expressando as

deformações em função das tensões. Em termos de flexibilidade, as relações constitutivas escrevem-se,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{f}\boldsymbol{\sigma} \quad (2.11)$$

onde \mathbf{f} é uma matriz simétrica designada por matriz de flexibilidade do material. A matriz de flexibilidade tem expressões distintas conforme se trate de um estado plano de tensão ou deformação. Para um estado plano de tensão, a definição da matriz de flexibilidade é,

$$\mathbf{f} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

onde E é o módulo de elasticidade (ou módulo de Young) e ν o coeficiente de Poisson. Em estado plano de deformação, a matriz de flexibilidade é dada por,

$$\mathbf{f} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Em termos de rigidez, as relações constitutivas assumem a forma genérica,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{k}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.14)$$

A matriz \mathbf{k} é a inversa de matriz de flexibilidade \mathbf{f} , dada por:

$$\mathbf{k} = \frac{E}{(1-\nu)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

no caso de estado plano de tensão, e por

$$\mathbf{k} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1/2(1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

no caso de estado plano de deformação.

2.6. Equação de Navier

A equação de Navier é uma forma compacta de escrever as equações governativas no domínio do elemento, juntando as equações de equilíbrio, compatibilidade e a lei constitutiva numa única equação, escrita em termos do campo de deslocamentos.

A equação de compatibilidade (2.10) é inserida na equação (2.11) para escrever a lei constitutiva em função dos campos dos deslocamentos,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{u} \quad (2.17)$$

A equação (2.17) é inserida de seguida na equação de equilíbrio (2.5) obtendo assim a equação de diferencial de equilíbrio escrita apenas em deslocamentos, denominada de equação de Navier,

$$\mathbf{D}(\mathbf{f}^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (2.18)$$

que engloba assim todas as equações do domínio.

2.7. Condições de fronteira

O problema da elasticidade plana definido nas secções de 2.1 a 2.4 apenas tem solução única se for complementado por condições de fronteira adequadas.

Na fronteira de Dirichlet impõem-se os valores dos deslocamentos, sendo a respectiva condição expressa por,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma \quad (2.19)$$

onde \mathbf{u}_Γ é o vector dos deslocamentos impostos, composto pelas suas componentes Cartesianas u_{Γ_x} e u_{Γ_y} ,

$$\mathbf{u}_\Gamma = \begin{bmatrix} u_{\Gamma_x} \\ u_{\Gamma_y} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Ao mesmo tempo, na fronteira de Neumann, Γ_σ , impõe-se que as tensões que actuam num elemento diferencial da mesma equilibrem as forças exteriores aplicadas. Para ilustrar esta situação, considere-se o elemento diferencial apresentado na Figura 2.4 actuado pelas

forças externas $\mathbf{t}_\Gamma = \begin{bmatrix} t_{\Gamma_x} \\ t_{\Gamma_y} \end{bmatrix}$ e as tensões $\boldsymbol{\sigma}$

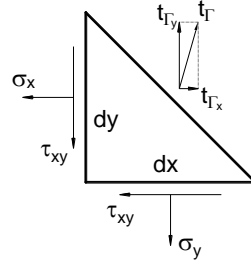


Figura 2.4: Superfície do corpo actuada por forças externas.

Para o elemento estar em equilíbrio, é necessário que as forças externas t_Γ equilibrem as forças internas σ . O equilíbrio na direcção x escreve-se como,

$$-\sigma_x dy - \tau_{xy} dx + t_{\Gamma_x} ds = 0 \quad (2.21)$$

onde $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ é o comprimento da fronteira exterior do elemento.

Dividindo a expressão (2.21) por ds obtém-se

$$\sigma_x \frac{dy}{ds} + \tau_{xy} \frac{dx}{ds} = t_{\Gamma_x} \quad (2.22)$$

Observando agora que os multiplicadores das tensões σ_x e τ_{xy} são as próprias componentes da normal unitária à fronteira $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}$, a equação (2.22) escreve-se como,

$$\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = t_{\Gamma_x} \quad (2.23)$$

Aplicando o mesmo procedimento na direcção y , a segunda equação de equilíbrio na fronteira é

$$\sigma_y n_y + \tau_{xy} n_x = t_{\Gamma_y} \quad (2.24)$$

Pode assim ser escrita a condição de equilíbrio na fronteira de Neumann da seguinte forma matricial

$$\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}_\Gamma \quad (2.25)$$

Na equação anterior, \mathbf{N} é uma matriz onde se reúnem as componentes do versor da normal exterior à fronteira Γ_σ , definida como,

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

3. Elementos finitos híbridos-Trefftz

3.1. Introdução

As soluções de muitos dos problemas planos de interesse prático em Engenharia Civil não se podem determinar analiticamente, sendo assim necessário aproximá-las.

Neste trabalho utiliza-se o modelo de tensão dos elementos finitos híbridos-Trefftz para obter tais aproximações.

Em qualquer classe de elementos finitos, o domínio é dividido em subdomínios onde os campos a determinar são obtidos através de combinações lineares de funções conhecidas.

A variante de elementos finitos mais usada em programas de cálculo automático é a dos elementos conformes de deslocamentos (convencionais). Nos elementos convencionais são aproximados os campos de deslocamentos, de maneira a satisfazerem localmente (em todos os pontos) as equações de compatibilidade, tanto no domínio de cada elemento como em todas as fronteiras de Dirichlet e interiores dos elementos. Os pesos usados para combinar as funções de aproximação são os deslocamentos de cada nó da malha (deslocamentos nodais), que são determinados impondo a condição de equilíbrio nos nós de cada elemento. Quando conhecido o campo de deslocamentos, usando as condições de compatibilidade (2.10) e elasticidade (2.11), obtêm-se os campos de deformações e de tensões. Contudo, as tensões e deformações obtidas por este método apresentam tipicamente uma qualidade inferior à do campo de deslocamentos.

Este facto pode ser problemático nas aplicações de Engenharia Civil, em que o dimensionamento estrutural faz-se preponderantemente com base em tensões e não em deslocamentos. Para suprir esta potencial lacuna dos elementos finitos convencionais surgem outros tipos de elementos finitos que visam garantir um melhor equilíbrio entre as qualidades dos campos de deslocamentos e de tensões, como é o caso dos elementos finitos híbridos-Trefftz adoptados neste trabalho.

Os elementos finitos híbridos-Trefftz são um caso particular dos elementos híbridos onde as funções de aproximação são condicionadas a satisfazer localmente a equação de Navier no domínio de cada elemento (condição Trefftz). Contudo, à semelhança dos elementos híbridos, os elementos híbridos-Trefftz não garantem a compatibilidade local nas fronteiras cinemáticas, contrariamente ao que acontecia nos elementos conformes de deslocamentos. Quando satisfeitas todas as equações do domínio, os pesos das funções de aproximação são obtidos impondo em forma fraca as condições de equilíbrio e compatibilidade nas fronteiras de cada elemento. As soluções obtidas desta forma, apesar de não serem nem localmente compatíveis, nem localmente equilibradas, apresentam um melhor equilíbrio entre a qualidade dos campos de tensões e deslocamentos.

No presente capítulo, apresentam-se os elementos finitos híbridos-Trefftz no seu modelo de tensão. A apresentação reflecte a compreensão dos elementos finitos híbridos-Trefftz como um caso particular dos elementos finitos híbridos, sendo estes últimos derivados primeiro.

O capítulo começa por introduzir a discretização do meio, descrevendo a malha e as fronteiras interelementares. De seguida são descritas as aproximações dos campos de tensões, no domínio de cada elemento e dos campos de deslocamentos nas fronteiras de Neumann e interelementares.

Com as aproximações definidas, passa-se à formulação da equação no domínio dos elementos finitos híbridos impondo de forma fraca a equação de compatibilidade (2.10). De seguida, definem-se as equações das fronteiras de Neumann e interelementares impondo de forma fraca as condições de equilíbrio nas mesmas fronteiras. Com as equações de domínio e fronteira definidas, forma-se o sistema resolutivo dos elementos finitos híbridos. Posteriormente, particularizam-se as funções de aproximação e o sistema resolutivo para o

caso dos elementos híbridos-Trefftz, com as simplificações decorrentes da imposição da condição de Trefftz. As expressões das funções a incluir na base de aproximação dos elementos finitos híbridos-Trefftz são obtidas resolvendo a equação de Navier (2.18), de forma explícita.

De seguida, apresenta-se o conceito de indeterminação estática e cinemática do sistema resolutivo dos elementos finitos híbridos-Trefftz.

Por fim, apresenta-se o conceito de energia de deformação para os elementos finitos híbridos-Trefftz.

3.2. Malhas e fronteiras interelementares

Considerando que o domínio do problema é discretizado em elementos finitos, conforme ilustrado na Figura 3.1. Cada elemento é composto por um domínio V^e e por uma fronteira Γ^e .

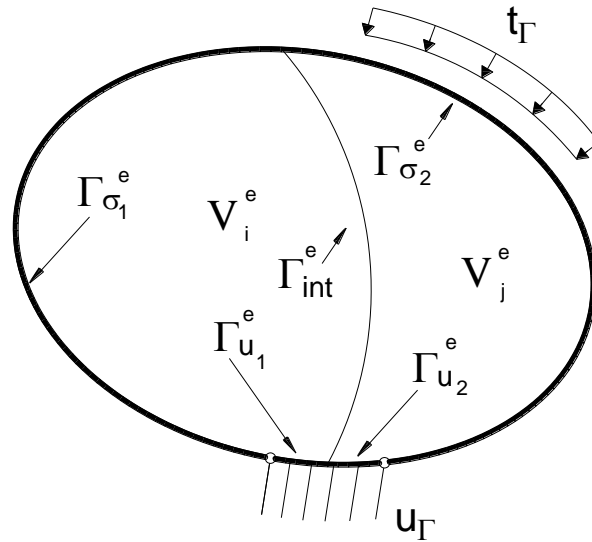


Figura 3.1: Elementos finitos e as suas fronteiras.

A fronteira Γ^e do elemento poderá incluir, para além das parcelas de Neumann (Γ_{σ}^e) e de Dirichlet (Γ_u^e) as fronteiras entre elementos adjacentes, denominadas de fronteiras interelementares (Γ_{int}^e). Nas fronteiras interelementares deve ser assegurada tanto a continuidade de tensões, através da imposição da condição de equilíbrio $\mathbf{N}^i \boldsymbol{\sigma}^i + \mathbf{N}^j \boldsymbol{\sigma}^j = \mathbf{0}$, onde i e j são os dois elementos que partilham a fronteira interelementar Γ_{int}^e , como a compatibilidade dos deslocamentos $\mathbf{u}^i = \mathbf{u}^j$.

Nos elementos finitos híbridos-Trefftz, é costume definir ainda as fronteiras como fronteiras essenciais e naturais, sendo a primeira, a fronteira onde se fazem aproximações e a segunda a fronteira onde não se fazem. Assim, definem-se para os elementos de tensão, as

fronteiras de Neumann e interelementares como fronteiras essenciais, $\Gamma_e^e = \Gamma_{\text{int}}^e \cup \Gamma_\sigma^e$ e as de Dirichlet como fronteiras naturais $\Gamma_n^e = \Gamma_u^e$.

3.3. Elemento finito híbrido de tensão

3.3.1. Bases de aproximação

Nesta secção definem-se as aproximações independentes do campo de tensão, no domínio do elemento e ainda dos campos de deslocamentos que ocorrem nas suas fronteiras essenciais.

A aproximação do campo de tensões no domínio do elemento é dada pelo produto da base das funções de aproximação \mathbf{S} e as tensões generalizadas \mathbf{X} ,

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y) = \mathbf{S}(x, y)\mathbf{X}, \text{ em } V^e \quad (3.1)$$

É típico do modelo de tensão dos elementos finitos híbridos que as funções contidas na base de aproximação \mathbf{S} sejam escolhidas de maneira a satisfazer exactamente a equação de equilíbrio no domínio do elemento,

$$\mathbf{D}\mathbf{S} = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

No caso da aproximação dos deslocamentos na fronteira essencial do elemento, esta é dada por

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{Z}(s)\mathbf{Y}, \text{ em } \Gamma_e^e \quad (3.3)$$

onde \mathbf{Z} representa a base das funções de aproximação dos deslocamentos na fronteira Γ_e^e , \mathbf{Y} é o vector dos deslocamentos generalizados e s é a coordenada local da fronteira, $s \in [-1, 1]$. De referir que as tensões e os deslocamentos generalizados listados nos vectores \mathbf{X} e \mathbf{Y} não têm significado físico, e as bases \mathbf{S} e \mathbf{Z} são desligadas dos nós, fazendo assim com que o acréscimo de novas funções às bases não alterem as funções anteriores.

Para além das restrições habituais de as bases serem completas e linearmente independentes e da condição (3.2) imposta a base \mathbf{S} , não existem, nesta fase, outras restrições à escolha das funções a incluir nas bases \mathbf{S} e \mathbf{Z} .

3.3.2. Equação no domínio

A equação no domínio do elemento híbrido é obtida impondo na forma fraca a equação de compatibilidade (2.10) utilizando as funções da base de aproximação \mathbf{S} das tensões como funções de ponderação (de teste):

$$\int_{V^e} \mathbf{S}^T (\mathbf{D}^* \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}) dV^e = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

Usando o teorema da divergência, a equação (3.4) é integrada por partes de maneira que surjam os termos das fronteiras, onde as respectivas condições são aplicadas,

$$\int_{\Gamma^e} (\mathbf{N}\mathbf{S})^T \mathbf{u} d\Gamma^e - \int_{V^e} (\mathbf{D}\mathbf{S})^T \mathbf{u} dV - \int_{V^e} \mathbf{S}^T \mathbf{f} \sigma dV^e = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

Tirando partido da condição (3.2), o termo envolvendo a divergência do campo de tensões é removido da equação (3.5), resultando,

$$\int_{\Gamma^e} (NS)^T \mathbf{u} d\Gamma^e - \int_{V^e} \mathbf{S}^T \mathbf{f} \sigma dV^e = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

Separando o integral da fronteira numa soma contendo as fronteiras essenciais e de Dirichlet, obtém-se

$$\int_{\Gamma_u^e} (NS)^T \mathbf{u} d\Gamma_u^e - \int_{\Gamma_e^e} (NS)^T \mathbf{u} d\Gamma_e^e - \int_{V^e} \mathbf{S}^T \mathbf{f} \sigma dV^e = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

Impondo a condição de fronteira (2.19) na fronteira de Dirichlet Γ_u^e , substituindo a aproximação de tensões (3.1) e inserindo a aproximação (3.3) do campo de deslocamentos nas fronteiras essenciais, a equação (3.7) assume a seguinte forma,

$$\int_{\Gamma_u^e} (NS)^T \mathbf{u}_\Gamma d\Gamma_u^e - \int_{\Gamma_e^e} (NS)^T \mathbf{Z} d\Gamma_e^e \mathbf{Y} - \int_{V^e} \mathbf{S}^T \mathbf{f} \sigma dV^e \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

Fazendo as definições,

$$\bar{\mathbf{u}}_\Gamma = \int_{\Gamma_u^e} (NS)^T \mathbf{u}_\Gamma d\Gamma_u^e \quad (3.9)$$

$$\mathbf{A} = \int_{\Gamma_e^e} (NS)^T \mathbf{Z} d\Gamma_e^e \quad (3.10)$$

$$\mathbf{F} = \int_{V^e} \mathbf{S}^T \mathbf{f} \sigma dV^e \quad (3.11)$$

a equação do domínio pode ser escrita na forma matricial como,

$$\mathbf{F} \mathbf{X} - \mathbf{A} \mathbf{Y} = \bar{\mathbf{u}}_\Gamma \quad (3.12)$$

onde, \mathbf{F} é a matriz de flexibilidade do elemento finito, \mathbf{A} é a matriz de fronteira, definida nas fronteiras essenciais Γ_e^e , e $\bar{\mathbf{u}}_\Gamma$ é o vector dos deslocamentos impostos, definido nas fronteiras naturais Γ_n^e .

Contudo, nas formulações híbridas não é garantido o equilíbrio local nas fronteiras essenciais pela escolha das bases de aproximação, tornando-se assim necessária a sua imposição através de um conjunto de equações adicionais, definidas na secção seguinte.

3.3.3. Equação na fronteira

A condição de equilíbrio (2.25) é imposta de forma fraca nas fronteiras de Neumann (exteriores) utilizando as funções contidas na base de deslocamentos \mathbf{Z} para ponderação,

$$\int_{\Gamma_\sigma^e} \mathbf{Z}^T (\mathbf{N} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{t}_\Gamma) d\Gamma_\sigma^e = \mathbf{0} \quad (3.13)$$

Substituindo a aproximação das tensões (3.1) na equação (3.13) obtém-se,

$$\int_{\Gamma_{\sigma}^e} \mathbf{Z}^T (NS) d\Gamma_{\sigma}^e \mathbf{X} = \int_{\Gamma_{\sigma}^e} \mathbf{Z}^T \mathbf{t}_{\Gamma} d\Gamma_{\sigma}^e \quad (3.14)$$

Fazendo a definição,

$$\bar{\mathbf{t}}_{\Gamma} = \int_{\Gamma_{\sigma}^e} \mathbf{Z}^T \mathbf{t}_{\Gamma} d\Gamma_{\sigma}^e \quad (3.15)$$

a equação da fronteira de Neumann pode então ser escrita da forma matricial como

$$\mathbf{A}^T \mathbf{X} = \bar{\mathbf{t}}_{\Gamma} \quad (3.16)$$

Tal como referido na secção 3.2, existe ainda a necessidade de assegurar a continuidade das tensões nas fronteiras interelementares, que pode ser expressa em forma fraca por,

$$\int_{\Gamma_{\text{int}}^e} \mathbf{Z}^T (\mathbf{N}_i \boldsymbol{\sigma}_j + \mathbf{N}_j \boldsymbol{\sigma}_i) d\Gamma_{\text{int}}^e = \mathbf{0} \quad (3.17)$$

Onde $\boldsymbol{\sigma}_i$ e $\boldsymbol{\sigma}_j$ são as tensões ao nível da fronteira interior Γ_{int}^e nos elementos i e j , que partilham a mesma fronteira, e \mathbf{N}_i e \mathbf{N}_j as respectivas normais unitárias á fronteira.

Aplicando a aproximação do campo de tensões (3.1) na equação (3.17), obtém-se,

$$\int_{\Gamma_{\text{int}}^e} \mathbf{Z}^T \mathbf{N}_i \mathbf{S}_i d\Gamma_{\text{int}}^e \mathbf{X}_i + \int_{\Gamma_{\text{int}}^e} \mathbf{Z}^T \mathbf{N}_j \mathbf{S}_j d\Gamma_{\text{int}}^e \mathbf{X}_j = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

Escrevendo a equação (3.18) na forma matricial, resulta,

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{X}_i + \mathbf{A}_j^T \mathbf{X}_j = \mathbf{0} \quad (3.19)$$

3.3.4. Sistema resolutivo

Conhecidas então todas as equações que definem a formulação dos elementos finitos híbridos de tensão, é possível construir o sistema resolutivo,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & -\mathbf{A} \\ -\mathbf{A}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{\Gamma} \\ -\bar{\mathbf{t}}_{\Gamma} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

O sistema (3.20) é simétrico, devido à simetria da matriz de flexibilidade do material, esparso e localizado, não envolve somatórios de matrizes de flexibilidade em elementos adjacentes, isto é, cada elemento tem a sua matriz de flexibilidade inserida de forma independente na diagonal da matriz dos coeficientes. Esta propriedade garante assim a possibilidade de fazer refinamentos das bases de aproximação diferentes para cada elemento.

3.4. Elementos híbridos-Trefftz de tensão

A diferença entre os elementos híbridos-Trefftz e os elementos híbridos “puros” é que nos elementos híbridos-Trefftz as aproximações dos campos de tensões, de deslocamentos e de deformações no domínio definem-se de modo a respeitar de forma exacta as equações governativas de equilíbrio (2.5), compatibilidade (2.10), e elasticidade (2.11).

Para satisfazer essas condições, a opção aqui é determinar primeiro as funções de aproximação do campo de deslocamentos, de maneira a satisfazerem a equação de Navier. Assim, a aproximação do campo de deslocamentos é definida como,

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{X} \quad (3.21)$$

e a condição de Trefftz é expressa por,

$$\mathbf{D}(\mathbf{f}^{-1} \mathbf{D}^* \boldsymbol{\Psi}) = \mathbf{0} \quad (3.22)$$

No segundo passo, determinam-se as funções da base de aproximação das deformações,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E} \mathbf{X} \quad (3.23)$$

de modo a satisfazerem a condição de compatibilidade no interior do elemento,

$$\mathbf{E} = \mathbf{D}^* \boldsymbol{\Psi} \quad (3.24)$$

Finalmente, a base de aproximação das tensões no domínio (3.1) é obtida aplicando a lei constitutiva (2.11) às funções da base (3.24),

$$\mathbf{E} = \mathbf{f} \mathbf{S} \quad (3.25)$$

Note-se que as funções de aproximação das tensões incluídas na base \mathbf{S} respeitam implicitamente a condição de equilíbrio (3.2) visto que são obtidas a partir de uma base de deslocamentos que satisfaz a equação de Navier.

As formas explícitas das funções que satisfazem as condições (3.22), (3.24), e (3.25) são derivadas na próxima secção.

3.4.1. Funções de aproximação

As funções incluídas nas bases de aproximação de Trefftz, são derivadas resolvendo a equação de Navier (2.18), que escrita de forma explícita, fica,

$$\nabla(k_{12} + k_{33})\nabla^T \mathbf{u} + k_{33}\nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.26)$$

onde ∇ é o operador gradiente,

$$\nabla = \begin{bmatrix} \partial x \\ \partial y \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

∇^T o operador de divergência,

$$\nabla^T = [\partial x \quad \partial y] \quad (3.28)$$

∇^2 o operador Laplaciano,

$$\nabla^2 = \partial x^2 + \partial y^2 \quad (3.29)$$

e k_{ij} os termos das linha i e coluna j das matrizes de rigidez do material (2.15) ou (2.16). Note-se que os termos k_{11} e k_{22} são eliminados da equação (3.26) tendo em conta que,

$$\begin{cases} k_{11} = k_{12} + 2k_{33} \\ k_{22} = k_{11} \end{cases} \quad (3.30)$$

A equação (3.26) tem duas classes de soluções, obtidas utilizando funções potencial harmónicas e bi-harmónicas, que correspondem respectivamente às parcelas Ψ_h e Ψ_b na base dos deslocamentos Ψ .

A função potencial harmónica é obtida assumindo que o campo de deslocamentos \mathbf{u} é definido como sendo o gradiente de uma função potencial ϕ_h ,

$$\mathbf{u} = \nabla \phi_h \quad (3.31)$$

Substituindo a definição (3.31) na equação (3.26), obtém-se

$$\nabla \left[(k_{12} + k_{33}) \nabla^2 \phi_h + k_{33} \nabla^2 \phi_h \right] = \mathbf{0} \quad (3.32)$$

A equação (3.32) é satisfeita se os potenciais ϕ_h forem funções harmónicas,

$$\nabla^2 \phi_h = 0 \quad (3.33)$$

Por razões de estabilidade numérica, a solução da equação de Laplace (3.33) é obtida em coordenadas polares [31]. Assim sendo, no referencial polar (r, θ) , as funções harmónicas ϕ_h utilizadas para construir a base de deslocamentos Ψ_h são definidas pelas seguintes expressões,

$$\phi_h(r, \theta) = \left(r^{n+1} \sin[(n+1)\theta] \mid r^{n+1} \cos[(n+1)\theta] \mid \ln(r) \mid \theta \right), \quad n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1 \quad (3.34)$$

Por opção, as funções utilizadas para a base de deslocamentos, Ψ_h , são,

$$\phi_h(r, \theta) = \left(r^{n+1} \sin[(n+1)\theta] \mid r^{n+1} \cos[(n+1)\theta] \right), \quad n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1 \quad (3.35)$$

Note-se que os dois últimos potenciais presentes na definição (3.34) não são incluídos na base Ψ_h por serem singular na origem e descontínuo, respectivamente. Da mesma forma,

os potenciais (3.34) não são construídos utilizando o parâmetro $n=0$, porque causaria campos de tensão singulares.

Inserindo os potenciais (3.35) na definição (3.31), e tendo em conta que em coordenadas polares $\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix}$, obtêm-se as seguintes funções de aproximação dos deslocamentos,

$$\psi_h(r, \theta) = r^n \begin{bmatrix} \sin[(n+1)\theta] & \cos[(n+1)\theta] \\ \cos[(n+1)\theta] & -\sin[(n+1)\theta] \end{bmatrix}, n \geq 1 \quad (3.36)$$

Da mesma forma, substituindo a expressão (3.36) na condição de compatibilidade (3.24), as funções de aproximação do campo de deformações são,

$$\mathbf{E}_h(r, \theta) = nr^{n-1} \begin{bmatrix} \sin[(n+1)\theta] & \cos[(n+1)\theta] \\ -\sin[(n+1)\theta] & -\cos[(n+1)\theta] \\ 2\cos[(n+1)\theta] & -2\sin[(n+1)\theta] \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Inserindo agora a equação (3.37) na condição de elasticidade (3.25) obtêm-se as funções de aproximação do campo de tensões,

$$\mathbf{S}_h(r, \theta) = 2k_{33}nr^{n-1} \begin{bmatrix} \sin[(n+1)\theta] & \cos[(n+1)\theta] \\ -\sin[(n+1)\theta] & -\cos[(n+1)\theta] \\ \cos[(n+1)\theta] & -\sin[(n+1)\theta] \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

As funções potenciais bi-harmónicas são obtidas assumindo que o campo de deslocamentos toma a seguinte forma,

$$\mathbf{u}_b = \left[(k_{12} + k_{33})^T \tilde{\nabla} \tilde{\nabla}^T \phi_b \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_{33} \nabla^2 \phi_b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

onde $\tilde{\nabla} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$ é o operador rotacional.

Substituindo a definição (3.39) na equação (3.26) e tendo em conta que $\tilde{\nabla}^T \tilde{\nabla} = \nabla^2$, e $\nabla^T \tilde{\nabla} = 0$, a equação (3.26) é satisfeita por todos os potenciais bi-harmónicos,

$$\nabla^4 \phi_b = 0 \quad (3.40)$$

As soluções da equação bi-harmónica (3.40) em coordenadas polares são,

$$\phi_b(r, \theta) = \left[r^{n+1} \sin[(n-1)\theta] \mid r^{n+1} \cos[(n-1)\theta] \mid r^2 \ln(r) \mid r^2 \theta \right], n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1 \quad (3.41)$$

Por opção, as funções utilizadas para a base de deslocamentos, Ψ_b , são,

$$\phi_b(r, \theta) = \begin{bmatrix} r^{n+1} \sin[(n-1)\theta] \\ r^{n+1} \cos[(n-1)\theta] \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1 \quad (3.42)$$

De forma análoga ao apresentado para as bases harmônicas Ψ_h , em que dois potenciais da base (3.34) não são incluídos, os seus homólogos para a base bi-harmônica Ψ_b , também não são incluídos, pelas mesmas razões. Igualmente, os potenciais bi-harmônicos não são construídos utilizando o parâmetro $n=0$, pois causaria campos de tensão singulares.

Inserindo os potenciais (3.42) na definição (3.39) e eliminando as soluções dependentes contidas na base harmônica (3.35), as seguintes bases de deslocamentos, deformações e tensões são obtidas,

$$\Psi_b(r, \theta) = r^n \begin{bmatrix} [k_{33}(n-3) + k_{12}(n-1)] \sin[(n-1)\theta] \\ [k_{33}(n+3) + k_{12}(n+1)] \cos[(n-1)\theta] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [k_{33}(n-3) + k_{12}(n-1)] \cos[(n-1)\theta] \\ -[k_{33}(n+3) + k_{12}(n+1)] \sin[(n-1)\theta] \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$E_b(r, \theta) = nr^{n-1} \begin{bmatrix} [k_{33}(n-3) + k_{12}(n-1)] \sin[(n-1)\theta] \\ [k_{33}(n+1) + k_{12}(n-1)] \sin[(n-1)\theta] \\ 2(k_{12} + k_{33})(n-1) \cos[(n-1)\theta] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [k_{33}(n-3) + k_{12}(n-1)] \cos[(n-1)\theta] \\ -[k_{33}(n+1) + k_{12}(n-1)] \cos[(n-1)\theta] \\ -2(k_{12} + k_{33})(n-1) \sin[(n-1)\theta] \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$S_b(r, \theta) = 2k_{33}(k_{12} + k_{33})nr^{n-1} \begin{bmatrix} (n-3) \sin[(n-1)\theta] \\ -(n+1) \sin[(n-1)\theta] \\ (n-1) \cos[(n-1)\theta] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (n-3) \cos[(n-1)\theta] \\ -(n+1) \cos[(n-1)\theta] \\ -(n-1) \sin[(n-1)\theta] \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

3.4.2. Equação no domínio

A equação no domínio dos elementos finitos híbridos-Trefftz é obtida particularizando a equação no domínio dos elementos finitos híbridos para as bases de Trefftz. Assim sendo, a base \mathbf{S} passa a ter duas componentes, $\mathbf{S} = [\mathbf{S}_h \quad \mathbf{S}_b]$, ficando assim a equação do domínio (3.8) na forma,

$$\int_{\Gamma_u^e} (\mathbf{NS}_i)^T \mathbf{u}_1 d\Gamma_u^e - \int_{\Gamma_e^e} (\mathbf{NS}_i)^T \mathbf{Z} d\Gamma_e^e \mathbf{Y} - \int_{V^e} \mathbf{S}_i^T \mathbf{f} \mathbf{S}_h dV^e \mathbf{X}_h - \int_{V^e} \mathbf{S}_i^T \mathbf{f} \mathbf{S}_b dV^e \mathbf{X}_b = \mathbf{0} \quad (3.46)$$

onde $i = \{h, b\}$.

Tendo em conta as definições (3.9), (3.10) e (3.11), a equação (3.46) pode ser escrita numa forma simplificada,

$$\mathbf{u}_{\Gamma_i} + \mathbf{A}_i \mathbf{Y} - \int_{V^e} \mathbf{S}_i^T \mathbf{f} \mathbf{S}_h dV^e \mathbf{X}_h - \int_{V^e} \mathbf{S}_i^T \mathbf{f} \mathbf{S}_b dV^e \mathbf{X}_b = \mathbf{0} \quad (3.47)$$

Recorrendo às simplificações próprias às bases de Trefftz, e integrando por partes os termos da matriz de flexibilidade elementar, resulta que

$$\mathbf{F}_{ij} = \int_{V^e} \mathbf{S}_i^T \mathbf{f} \mathbf{S}_j dV^e = \int_{\Gamma^e} (\mathbf{N} \mathbf{S}_i)^T \boldsymbol{\Psi}_j d\Gamma^e \quad (3.48)$$

Onde $\{i, j\} = \{h, b\}$,

e a equação no domínio fica,

$$\mathbf{F}_{ih} \mathbf{X}_h + \mathbf{F}_{ib} \mathbf{X}_b - \mathbf{A}_i \mathbf{Y} - \bar{\mathbf{u}}_{\Gamma_i} = \mathbf{0} \quad (3.49)$$

onde \mathbf{F}_{ih} e \mathbf{F}_{ib} são agora definidos exclusivamente por integrais nas fronteiras.

3.4.3. Equação na fronteira

Seguindo o mesmo raciocínio usado para o domínio, a equação na fronteira (3.14) dos elementos híbridos-Trefftz toma a forma,

$$\int_{\Gamma} \mathbf{Z}^T (\mathbf{N} \mathbf{S}_h) d\Gamma_{\sigma}^e \mathbf{X}_h + \int_{\Gamma} \mathbf{Z}^T (\mathbf{N} \mathbf{S}_b) d\Gamma_{\sigma}^e \mathbf{X}_b = \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{Z}^T \mathbf{t}_{\Gamma} d\Gamma_{\sigma}^e \quad (3.50)$$

Fazendo as definições,

$$\mathbf{A}_h = \int_{\Gamma_{\sigma}^e} (\mathbf{N} \mathbf{S}_h)^T \mathbf{Z} d\Gamma_{\sigma}^e \quad (3.51)$$

$$\mathbf{A}_b = \int_{\Gamma_{\sigma}^e} (\mathbf{N} \mathbf{S}_b)^T \mathbf{Z} d\Gamma_{\sigma}^e \quad (3.52)$$

a equação da fronteira de Neumann para elementos híbridos-Trefftz de tensão pode então ser escrita da forma matricial como

$$\mathbf{A}_h^T \mathbf{X}_h + \mathbf{A}_b^T \mathbf{X}_b = \bar{\mathbf{t}}_{\Gamma} \quad (3.53)$$

Finalmente, usando a definição (3.19), a equação da fronteira interelementar para elementos de Trefftz é escrita como,

$$\mathbf{A}_{h_i}^T \mathbf{X}_{h_i} + \mathbf{A}_{b_i}^T \mathbf{X}_{b_i} + \mathbf{A}_{h_j}^T \mathbf{X}_{h_j} + \mathbf{A}_{b_j}^T \mathbf{X}_{b_j} = \mathbf{0}$$

3.4.4. Sistema resolutivo

Conhecidas então todas as equações que definem a formulação, é possível construir o sistema resolutivo do modelo de tensões dos elementos híbridos-Trefftz,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{hh} & \mathbf{F}_{hb} & -\mathbf{A}_h \\ \mathbf{F}_{bh} & \mathbf{F}_{bb} & -\mathbf{A}_b \\ -\mathbf{A}_h^T & -\mathbf{A}_b^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_h \\ \mathbf{X}_b \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{\Gamma_h} \\ \bar{\mathbf{u}}_{\Gamma_b} \\ -\bar{\mathbf{t}}_{\Gamma} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

onde, $\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{hh} & \mathbf{F}_{hb} & -\mathbf{A}_h \\ \mathbf{F}_{bh} & \mathbf{F}_{bb} & -\mathbf{A}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_h \\ \mathbf{X}_b \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{\Gamma_h} \\ \bar{\mathbf{u}}_{\Gamma_b} \end{bmatrix}$ são as equações de compatibilidade escritas no

domínio do elemento, e $\begin{bmatrix} -\mathbf{A}_h^T & -\mathbf{A}_b^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_h \\ \mathbf{X}_b \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{t}}_{\Gamma} \end{bmatrix}$ as equações de equilíbrio nas suas

fronteiras essenciais.

3.4.5. Indeterminação estática e cinemática

Para que o sistema resolutivo (3.54) apresente solução única, as bases de aproximação devem ser escolhidas de modo a garantir que o problema seja tanto cinematicamente indeterminado como estaticamente indeterminado.

Um problema diz-se cinematicamente indeterminado quando não é possível determinar todos os deslocamentos generalizados apenas pelas equações de compatibilidade e estaticamente indeterminado quando não se consegue determinar todas as tensões generalizadas apenas pelas equações de equilíbrio.

Designando por α e β , respectivamente, o valor da indeterminação estática e o valor da indeterminação cinemática, o primeiro representa a diferença entre o número total de graus de liberdade presentes nas equações de equilíbrio nas fronteiras essenciais e o número total dessas equações. O número de indeterminação cinemática β representa a diferença entre o número total de graus de liberdade presentes nas equações de compatibilidade e o número total dessas equações.

Assim sendo, o valor de α é dado por,

$$\alpha = N_D - N_{\Gamma} > 0 \quad (3.55)$$

onde, N_{Γ} é o número de equações de equilíbrio e N_D o número de incógnitas, igual ao número de equações de compatibilidade. O número de indeterminação cinemática é dado por,

$$\beta = (N_D + N_{\Gamma}) - N_D = N_{\Gamma} > 0 \quad (3.56)$$

sendo N_D o número de equações de compatibilidade e $N_D + N_{\Gamma}$ o número de incógnitas.

O número de equações de compatibilidade é a dimensão da matriz de flexibilidade \mathbf{F} , enquanto que o número de equações de equilíbrio é igual ao número de colunas das matrizes \mathbf{A}_h e \mathbf{A}_b

A condição de indeterminação estática não é implicitamente satisfeita, tendo de ser garantida pela escolha das dimensões relativas das bases de aproximação nos domínios e nas fronteiras essenciais. A condição (3.55) pode ser satisfeita a nível do elemento ou a nível

estrutural. A primeira opção foi a adoptada neste trabalho para evitar o sobre-condicionamento dos graus de liberdade associados às tensões generalizadas. Pelo contrário, o sistema nunca pode ser hipo-cinémático e será cinematicamente indeterminado sempre que haja fronteiras essenciais.

3.5. Energia de deformação

A energia de deformação é definida pela seguinte equação,

$$E = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.57)$$

Utilizando a relação de elasticidade(2.11) e através das aproximações dos campos de tensão (3.1) e deformação (3.23), a aproximação da energia de deformação é dada por,

$$E_{FE} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{X}^T \mathbf{S}^T \mathbf{f} \mathbf{S} \mathbf{X} dV = \frac{1}{2} \mathbf{X}^T \int_V \mathbf{S}^T \mathbf{f} \mathbf{S} dV \mathbf{X} \quad (3.58)$$

Finalmente, recorrendo à definição (3.11), resulta que

$$E_{FE} = \frac{1}{2} \mathbf{X}^T \mathbf{F} \mathbf{X} \quad (3.59)$$

4. Implementação computacional

4.1. Introdução

Neste capítulo é descrita a metodologia adoptada para a implementação computacional dos elementos híbridos-Trefftz de tensão em ambiente Matlab [33].

A implementação foi desenvolvida de modo a ser integrada numa plataforma computacional de maior dimensão onde já existem elementos híbridos e híbridos-Trefftz para problemas acústicos, térmicos e elastoestáticos planos (elementos híbridos-Trefftz de deslocamento [34]). Assim, a implementação adoptada segue a lógica de programação comum ao que já existe nesta plataforma.

A organização deste capítulo é feita de maneira a ilustrar o funcionamento do programa computacional. Assim, o mesmo está dividido em três partes correspondendo às fases de pré-processamento, de processamento e de pós processamento.

São introduzidos e discuto primeiro os vários sistemas de referência utilizados na implementação, de modo a facilitar a compreensão dos restantes tópicos tratados.

A fase de pré-processamento corresponde à introdução dos dados de entrada por parte do utilizador, à geração da malha, à definição da topologia da mesma, e à construção da estrutura de dados onde é guardada a informação.

Na fase de processamento, calculam-se os coeficientes do sistema resolutivo e procede-se à sua montagem. O cálculo dos coeficientes do sistema envolve técnicas de integração numérica, ao passo que a resolução do mesmo recorre a técnicas de pré-condicionamento e solvers adaptativos. Ademais, a escolha das bases de aproximação deve garantir que o sistema é, ao mesmo tempo, estática e cinematicamente indeterminado.

Na fase de pós-processamento, são acrescentadas à solução os modos de corpo rígido, e é construído o campo de soluções, tanto de deslocamentos como de tensões.

4.2. Sistemas de referência

Para uma boa definição do modelo e eficiente funcionamento do algoritmo é necessário utilizar diversos referenciais, como ilustrado na Figura 4.1. Estes referenciais são sucintamente descritos de seguida.

- O referencial global Cartesiano (X, Y) é o referencial onde se define a geometria da estrutura e as expressões paramétricas das fronteiras. É também o referencial onde são apresentados os campos das soluções.
- O referencial local Cartesiano (x, y) , de eixos paralelos aos do referencial global, situa-se com a origem no centróide de cada elemento.
- O referencial local polar (r, θ) tem a mesma origem que o referencial local Cartesiano e é onde são expressas as funções da base de aproximação do domínio dos elementos.
- O referencial normal-tangencial (n, t) da fronteira é usado pelo utilizador para definir as condições de fronteira e é ainda onde são expressas as equações de equilíbrio interelementares. Tem a origem no meio da fronteira. O eixo n é ortogonal à fronteira e orientado para fora do elemento. O sentido positivo do eixo t é escolhido de modo a ter sempre um elemento à esquerda.

- O referencial da fronteira $(s) [-1,1]$ é utilizado para definir as funções da base de aproximação dos deslocamentos nas fronteiras dos elementos, e é onde estão referenciados os pontos de Gauss-Legendre para a integração numérica necessária para o cálculo dos coeficientes do sistema resolutivo. Tem a origem no centro da fronteira e a orientação idêntica ao eixo tangencial t .

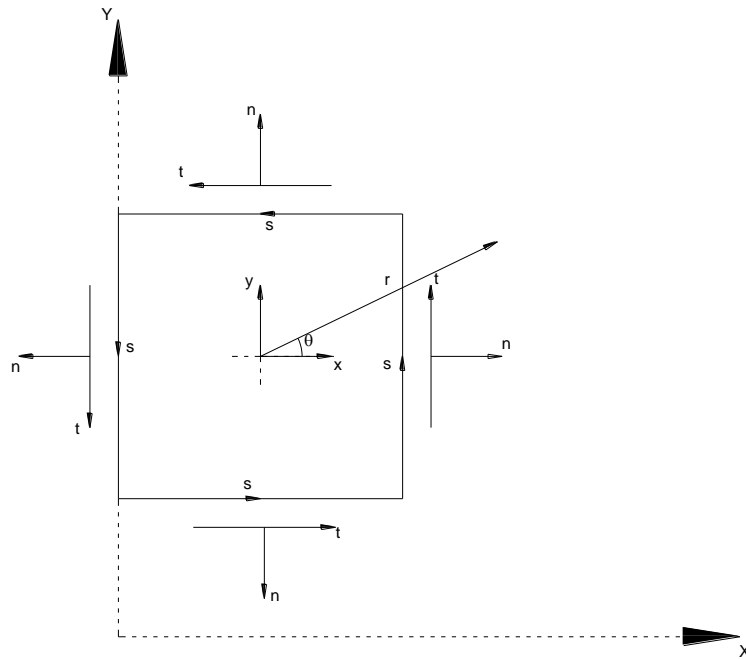


Figura 4.1: Sistemas de referência.

4.3. Pré-processamento

Nesta fase da análise, o utilizador define todos os dados de entrada do modelo. Os mesmos são introduzidos no ficheiro **Input_Proc.m**. Estes dados dizem respeito à geometria da estrutura, à dimensão da malha de elementos finitos, às propriedades mecânicas dos materiais, às acções aplicadas, aos refinamentos das bases de aproximação nos domínios e fronteiras essenciais dos elementos, às condições de fronteira e ao número de pontos de integração de Gauss-Legendre.

A geometria da estrutura e a malha de elementos finitos são definidas no referencial global (X, Y) , sendo todos os elementos referenciados a este sistema de eixos. O utilizador pode optar por dois tipos de malha, a malha regular, composta por elementos rectangulares, indicada para estruturas planas de geometria rectangular, ou por uma malha não regular, composta por elementos triangulares, indicada para estruturas não rectangulares.

Relativamente às propriedades mecânicas dos materiais, o utilizador define o módulo de elasticidade E e o coeficiente de Poisson ν . Com estes coeficientes o programa calcula os elementos da matriz de flexibilidade do material, tanto para estado plano de tensão (2.12) como para estado plano de deformação (2.13). No que diz respeito às fronteiras, como a fronteira predominante é a fronteira do tipo Neumann, todas as fronteiras da malha estão pré-definidas como tal, e o utilizador apenas deve especificar as fronteiras onde pretende aplicar

deslocamentos (fronteiras de Dirichlet). Em relação aos pontos de Gauss-Legendre, estes são usados para a integração numérica efectuada na fase de processamento, e são definidos no referencial de fronteira. Quando o utilizador define as ordens das bases de aproximação nos domínios e fronteiras essenciais, estas devem ser definidas de modo a evitar o sobre-condicionamento, isto é, de modo a respeitar a condição de indeterminação estática (3.55).

Completada a etapa de introdução de dados, o programa gera efectivamente a malha e devolve os dados geométricos e topológicos através da função **GenerateMesh.m**. Estes dados, que caracterizam a geometria da malha de elementos finitos, permitem uma correlação entre nós, fronteiras e elementos numa estrutura lógica.

A informação topológica devolvida pelo gerador de malha é complementada pela informação referente às bases de aproximação e aos parâmetros do material e integrada nas estruturas de dados que dizem respeito às fronteiras (**Edges**) e aos elementos (**Loops**). Existe ainda outra estrutura de dados relativamente às condições de fronteira (**BConds**) que contém informação sobre as solicitações aplicadas nas fronteiras de Neumann e às condições cinemáticas nas fronteiras de Dirichlet.

A geração de malha e as estruturas de dados são descritas com mais pormenor a seguir.

4.3.1. Geradores de malha

4.3.1.1. Gerador de malha regular

O gerador de malha regular é usado com eficácia para a modelação de estruturas de geometria rectangular. A estrutura é malhada utilizando elementos rectangulares de dimensões iguais. O utilizador basta definir as dimensões geométricas e o número de elementos finitos que pretende utilizar nas direcções X e Y . Uma malha rectangular típica é ilustrada na Figura 4.2.

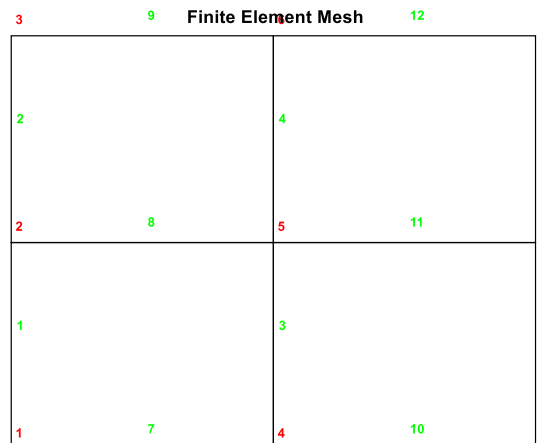


Figura 4.2: Gerador de malha regular. Exemplo de malha de 4 elementos e 12 fronteiras.

4.3.1.2. Gerador de malha não-regular

O gerador de malha não-regular é disponibilizado através de uma interface gráfica incorporada no ambiente Matlab onde a forma da estrutura pode ser definida por qualquer combinação de rectângulos, elipses e polígonos, apresentando, por isso, bastante maior

flexibilidade do que no caso anterior. A geometria é discretizada de forma automática em elementos triangulares de dimensão máxima definida pelo utilizador como ilustrado na Figura 4.3. O gerador de malha permite ainda uma opção de refinamento progressivo.

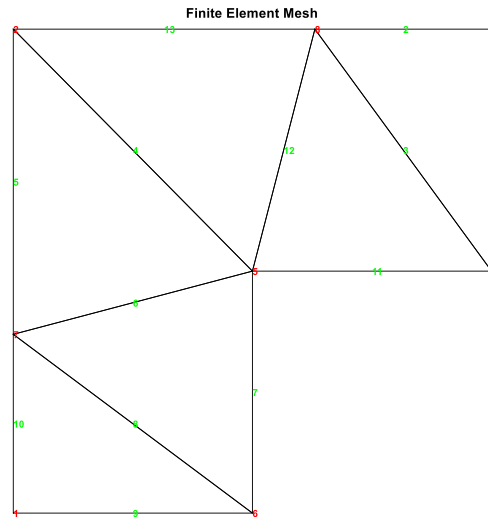


Figura 4.3: Gerador de malha não regular. Exemplo de malha não regular de 6 elementos e 13 fronteiras.

4.3.2. Dados geométricos e topológicos

Os dados geométricos e topológicos que resultam do gerador de malha são os seguintes:

- **Nodes:** matriz com o número das linhas igual ao número de nós e duas colunas. Cada linha contém as coordenadas do respectivo nó, no referencial global (X, Y) .
- **Loops_nodes:** matriz com o número de linhas igual ao número total de elementos e três ou quatro colunas, consoante se trate da malha triangular ou rectangular, respectivamente. Cada linha contém os índices dos nós de cada elemento. A listagem dos nós de cada elemento é feita no sentido horário.
- **Edge_nodes:** matriz com o número de linhas igual ao número total de fronteiras e duas colunas. Cada linha contém os índices dos nós inicial e final de cada fronteira com o sentido ilustrado na Figura 4.2.
- **Edge_loops :** matriz com o número de linhas igual ao número total de fronteiras e duas colunas. Cada linha contém os índices dos elementos à esquerda e à direita de cada fronteira. Se não existir elemento à direita da fronteira, a entrada correspondente é nula. A matriz **Edge_loops** permite ao programa fazer a distinção entre fronteiras interiores (se existirem dois elementos adjacentes), ou exteriores (no caso de ter apenas um).
- **Loops_edges:** matriz com o número de linhas igual ao número total de elementos e três ou quatro colunas, consoante se trate da malha não regular ou rectangular, respectivamente. Cada linha contém os índices das fronteiras de cada elemento.

4.3.3. Estruturas de dados

Nesta secção são apresentadas as três estruturas de dados usadas pelo programa, nomeadamente as estruturas **Edges**, **Loops** e **BConds**.

4.3.3.1. Estrutura Edges

A estrutura **Edges** é utilizada para armazenar a informação que diz respeito às fronteiras. Os membros que compõem esta estrutura são os seguintes,

- **Edges.nini** : vector de dimensão igual ao número total de fronteiras, em que cada termo corresponde ao índice do nó inicial da fronteira, respeitando a orientação definida pelo gerador de malha.
- **Edges.nfin** : vector de dimensão igual ao número total de fronteiras, em que cada termo corresponde ao índice do nó final da fronteira, respeitando a orientação definida pelo gerador de malha.
- **Edges.parametric** : matriz com o número de linhas igual ao número total de fronteiras e quatro colunas, onde cada linha contém os dados geométricos de cada fronteira. Os termos presentes em cada linha são as coordenadas do nó inicial da fronteira no referencial global (X, Y) e as distâncias nas direcções Cartesianas entre os nós inicial e final da fronteira.
- **Edges.lleft** : vector de dimensão igual ao número total de fronteiras, em que cada termo corresponde aos índices dos elementos situados à esquerda da fronteira. A orientação das fronteiras é definida de maneira a que exista sempre elemento à esquerda.
- **Edges.lright** : vector de dimensão igual ao número total de fronteiras, em que cada termo corresponde aos índices dos elementos situados à direita da fronteira. Se não existir elemento à direita, a entrada é nula.
- **Edges.type** : vector de dimensão igual ao número total de fronteiras, em que cada termo contém o carácter ' N ' ou ' D ' consoante o utilizador defina a fronteira como Neumann ou Dirichlet, respectivamente. As fronteiras interiores devem ser definidas como fronteiras de Neumann, pelas razões explicadas no capítulo anterior. As fronteiras exteriores devem ser definidas em função das condições de fronteira aplicadas, Neumann para o caso de haver forças conhecidas em pelo menos uma direcção e Dirichlet no caso contrário. O programa verifica a ocorrência de erros na definição das fronteiras e interrompe a execução se detectar algum.
- **Edges.order** : vector de dimensão igual ao número total de fronteiras, em que cada termo contém o grau máximo dos polinómios contidos na base de aproximação da respectiva fronteira.
- **Edges.insert** : matriz com o número de linhas igual ao número total de fronteiras e duas colunas. Cada linha contém os pontos de entrada das matrizes A_h e A_b da respectiva fronteira no sistema resolutivo (3.54), correspondentes às

aproximações dos deslocamentos nas direcções normal e tangencial. Mais informações sobre a identificação dos pontos de entrada dos blocos constituintes do sistema resolutivo e as respectivas dimensões podem ser encontradas na secção 4.4.2

- **Edges.dim** : matriz com o número de linhas igual ao número total de fronteiras e duas colunas. Cada linha contém as dimensões da base de aproximação das matrizes \mathbf{A}_h e \mathbf{A}_b das respectivas fronteiras (3.51) e (3.52), correspondentes às aproximações dos deslocamentos nas direcções normais e tangencial.

4.3.3.2. Estrutura Loops

A estrutura **Loops** armazena a informação que diz respeito aos elementos. Os membros que compõem esta estrutura são os seguintes:

- **Loops.nodes** : matriz igual à matriz topológica **Loops_nodes** criada pelo gerador de malha.
- **Loops.edges** : matriz igual à matriz topológica **Loops_edges** criada pelo gerador de malha.
- **Loops.center** : matriz com o número de linhas igual ao número total de elementos e duas colunas. Cada linha contém a localização do centróide de cada elemento, definida no referencial global (X, Y) . O centróide do elemento corresponde à origem do referencial local.
- **Loops.area** : vector de dimensão igual ao número total de elementos, em que cada termo contém a área do respectivo elemento.
- **Loops.order** : vector de dimensão igual ao número total de elementos, em que cada termo define a ordem máxima das funções de aproximação da base das tensões no domínio do respectivo elemento.
- **Loops.materials** : matriz com o número de linhas igual ao número total de elementos e cinco colunas. Cada linha contém os valores dos parâmetros mecânicos do material, ν , E , k_{11} , k_{12} e k_{33} .
- **Loops.insert** : matriz com o número de linhas igual ao número total de elementos e quatro colunas. Cada linha contém os pontos de entrada de cada bloco da matriz de flexibilidade \mathbf{F}_{hh} e \mathbf{F}_{bb} do respectivo elemento. Mais informações sobre os pontos de inserção e as dimensões dos blocos das matrizes de flexibilidade podem ser encontradas na secção 4.4.2.
- **Loops.dim** : matriz com o número de linhas igual ao número total de elementos e quatro colunas. Cada linha contém as dimensões de cada bloco das matrizes de flexibilidade \mathbf{F}_{hh} e \mathbf{F}_{bb} do respectivo elemento.

4.3.3.3. Estrutura BConds

A estrutura **BConds** armazena a informação referente às condições de fronteiras. Os membros desta estrutura são os seguintes,

- **BConds.Neumann** : Lista de dimensão igual ao número total de fronteiras, em que cada linha contém os valores das forças externas aplicadas nas fronteiras de Neumann, nas componentes normal e tangencial. As entradas correspondentes às fronteiras que não sejam de Neumann contêm NaN (Not a Number).
- **BConds.Dirichlet** : Lista de dimensão igual ao número total de fronteiras, em que cada linha contém os deslocamentos impostos nas fronteiras de Dirichlet, nas componentes normal e tangencial. As entradas correspondentes às fronteiras que não sejam de Dirichlet contêm NaN.

A condição de fronteira deve ser definida coerentemente com a sua natureza, como referido na definição do **Edges.type**.

As condições de fronteira são aplicadas no referencial normal-tangencial à fronteira (n, t) . Estas são definidas pelo utilizador de forma independente nas suas componentes normal e tangencial, e por polinómios de grau arbitrário, que são controlados pela inserção de valores dos respectivos campos em pontos equidistantes. Esses valores são interpolados pelo programa que gera o respectivo polinómio de grau $N-1$, sendo N o número de valores especificados.

4.4. Processamento

Esta fase de análise corresponde ao cálculo dos coeficientes do sistema resolutivo (3.54) e ao seu pré-condicionamento e resolução. Para a completa definição do sistema resolutivo, é preciso escolher as funções de aproximação a incluir nas bases dos deslocamentos nas fronteiras essenciais, efectuar o mapeamento do sistema para permitir a inserção correcta de cada bloco correspondente, e calcular os integrais que definem os mesmos blocos.

4.4.1. Descrição das bases

Conforme referido na secção 3.3.1, a escolha das funções a inserir na base \mathbf{Z} dos deslocamentos nas fronteiras essenciais é livre. Nesta implementação, para a construção da base \mathbf{Z} utilizada na aproximação dos deslocamentos (3.3), são utilizados polinómios Chebyshev, definidos como,

$$Z_m(s) = \cos[m \arccos(s)], \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad s \in [-1, 1] \quad (4.1)$$

A opção de se utilizar polinómios Chebyshev, vem do facto de estes formarem uma base completa no intervalo $[-1, 1]$ e serem estáveis numericamente.

Sendo a definição das condições de fronteira feita nas direcções normal tangencial à fronteira, é necessário o programa definir de forma independente estas componentes. Assim a base \mathbf{Z} toma a forma,

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_t \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Apesar de poderem ser definidas de forma independente, as bases \mathbf{Z}_n e \mathbf{Z}_t são definidas de maneira idêntica ($n_r^n = n_r^t$) na actual versão do programa, $\mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}_t$. Notando por n_r o grau máximo dos polinómios contidos nas duas bases, a sua dimensão é igual a $n_r + 1$.

4.4.2. Mapeamento do sistema

Com a fase de introdução de dados completa e a base \mathbf{Z} definida, o programa utiliza a informação armazenada nas estruturas de dados, e realiza o mapeamento do sistema resolutivo, com o objectivo de alocar memória necessária para cada bloco e inserir cada bloco na posição certa. O mapeamento é realizado através da função **AssignParts**, onde se definem os pontos de entrada para cada elemento e fronteira essencial e as respectivas dimensões dos blocos associados.

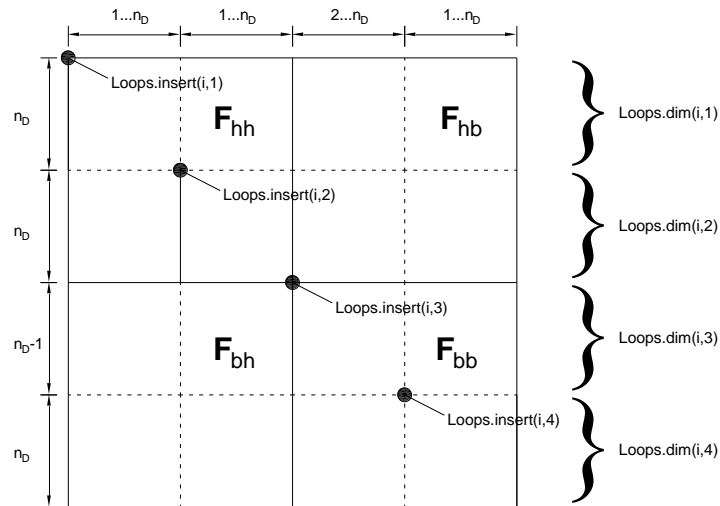
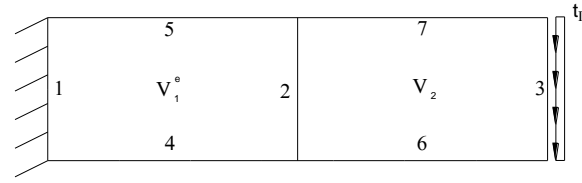


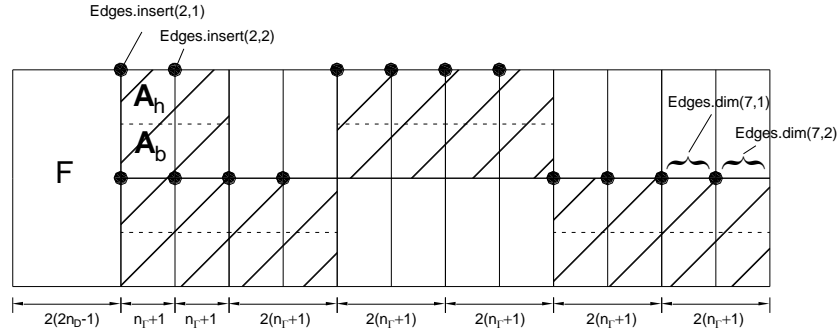
Figura 4.4: Mapeamento das matrizes de flexibilidade.

Na Figura 4.4 é apresentada a parte do sistema resolutivo (3.54) que diz respeito à matriz de flexibilidade de um do elemento “i”. Em cada direcção, os quatro sectores que compõem a matriz referem-se as funções de aproximação obtidas através dos potenciais (3.35) e (3.42). Notando por n_D a ordem das funções de aproximação do elemento, as dimensões de cada bloco são iguais a n_D , excepto num dos modos bi-harmónicos, onde a inclusão de $n=1$ leva a um modo de tensão nula (ver definição (3.42)). Conhecidas as dimensões de cada bloco, é possível calcular os membros **insert** e **dim** da estrutura **Loops**, conforme referido na secção 4.3.3.2. Os seus significados encontram-se ilustrados na Figura 4.4.

No que diz respeito às fronteiras, é seguido um procedimento semelhante ao utilizado no domínio.



(a) Modelo de 2 elementos e 7 fronteiras



(b) Mapeamento das matrizes A_h e A_b das fronteiras essenciais de um modelo de 2 elementos e 7 fronteiras.

Figura 4.5- Mapeamento das matrizes A_h e A_b das fronteiras essenciais de um modelo de 2 elementos e 7 fronteiras.

Na Figura 4.5 (b), é então apresentada a parte do sistema resolutivo que diz respeito às matrizes A_h e A_b dos elementos, para a estrutura representada na figura 4.5 (a). São ilustrados os seus pontos de inserção e as dimensões nas componentes normal e tangencial. Estes pontos e dimensões são guardados nos membros **insert** e **dim** respectivamente, da estrutura **Edges**.

4.4.3. Integração numérica

Geralmente, o processo de cálculo dos integrais que ocorrem nas formulações de elementos finitos é feito recorrendo a técnicas de integração numérica, devido ao facto de não ser viável, para a maior parte dos problemas, a determinação do valor do integral de forma analítica.

No programa aqui desenvolvido, o cálculo dos integrais que definem os coeficientes do sistema resolutivo (3.54), é feito recorrendo à aplicação da regra de quadratura de Gauss-Legendre. Assim sendo, o cálculo do integral é reduzido a uma soma ponderada dos valores das funções a integrar, em determinados pontos críticos, denominados de pontos de quadratura.

Para a realização da integração, é necessário que todos os domínios sejam mapeados para o intervalo onde os pontos de quadratura são definidos que, neste caso, é sempre $s \in [-1,1]$. O valor I do integral de uma função genérica $f(s)$ definida no referencial da fronteira é dado através da seguinte expressão,

$$I = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 f(s) ds = \frac{L}{2} \sum_{i=1}^n W_i(s_i) f(s_i) \quad (4.3)$$

onde, L é o comprimento da fronteira que representa o domínio da integração, n é o número de pontos de Gauss-Legendre, s_i são as abcissas correspondentes a esses pontos e W_i os respectivos pesos. Pela quadratura de Gauss-Legendre, e utilizando n ponto de amostragem, obtém-se um resultado exacto para a integração polinómios de grau $2n-1$ ou inferior.

Descrito o método numérico para determinar todos os termos do sistema, apresenta-se de seguida como o mesmo é implementado em ambiente Matlab.

Tendo em conta que a utilização de ciclos “for” prolongaria consideravelmente o tempo computacional, devido à linguagem de programação do Matlab ser interpretativa, os elementos das matrizes e vectores do sistema resolutivo são calculados a partir de matrizes tridimensionais e bidimensionais, respectivamente, que permitem determinar todos os coeficientes numa única operação.

As matrizes tridimensionais são utilizadas para guardar os integrandos cuja integração conduz às matrizes de flexibilidade \mathbf{F} , e das fronteiras \mathbf{A} através das expressões (3.11) e (3.10) respectivamente. As linhas e colunas das matrizes tridimensionais guardam os valores que correspondem aos respectivos graus de aproximação das bases envolvidas e nas páginas guardam-se os homólogos valores nas abcissas s_i .

Os vectores que compõem o lado direito do sistema são obtidos a partir de matrizes bidimensionais. As linhas destas matrizes guardam os valores que correspondem aos vários graus das funções de ponderação e nas colunas guardam-se os valores correspondentes as respectivas abcissas.

4.4.4. Resolução do sistema

Antes de ser resolvido, ao sistema resolutivo (3.54) é aplicado um pré-condicionador com o objectivo de reduzir o número de condição do mesmo. Essa redução é obtida através da uniformização do valor dos coeficientes da diagonal principal do sistema a um valor unitário, sem comprometer a simetria deste. O procedimento utilizado é sucintamente descrito de seguida. Considerado o sistema resolutivo (3.54) escrito na forma genérica

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{v} \quad (4.4)$$

define-se uma matriz de escala como sendo a matriz diagonal cujos termos são iguais aos termos diagonais da matriz \mathbf{M} , à potência $-1/2$,

$$\begin{cases} S_{ii} = (M_{ii})^{-1/2} \\ S_{ij} = 0 \quad (\forall) \quad i \neq j \end{cases} \quad (4.5)$$

No caso em que o termo da diagonal da matriz M é nulo, o respectivo factor de escala é unitário.

O sistema escalado é escrito agora como

$$\bar{M}\bar{x} = \bar{v} \quad (4.6)$$

onde,

$$\bar{M} = S^T M S \quad (4.7)$$

$$\bar{x} = S^{-1} x \quad (4.8)$$

$$\bar{v} = S^{-1} v \quad (4.9)$$

Note-se, pela definição (4.7), que a simetria do sistema original é preservada no sistema escalado (4.6).

De seguida, o programa verifica o condicionamento do sistema escalado (4.6). Se o número de condição for superior à inversa da precisão da máquina ($1/eps = 4.5036e+15$), o utilizador tem duas opções. A primeira opção é melhorar o respectivo número de condição aumentando o número de elementos da malha e diminuindo a ordem das funções das bases de aproximação. A segunda opção é prosseguir com a resolução, utilizando um solver baseado na pseudo-inversa da matriz dos coeficientes, com o risco de obter um resultado com menos qualidade. Ademais, este *solver* tem um custo computacional muito superior aos *solvers* convencionais.

A resolução dos sistemas bem condicionados é feita utilizando o solver adaptativo e paralelizado *mldivide* disponível no Matlab. Com este *solver*, o sistema (4.6) é resolvido através de um procedimento numérico que depende das características da matriz dos coeficientes, que tanto pode utilizar *solvers* simples como *solvers* triangulares, ou mais complexos como *solvers QR*.

4.5. Pós-processamento

Nesta fase, o programa reconstrói a solução utilizando os resultados obtidos para X calculada na fase anterior, e de seguida apresenta graficamente os campos de tensões e deslocamentos.

Os deslocamentos, se avaliados apenas com esta informação, não recuperam correctamente a condição de compatibilidade nas fronteiras exteriores e interelementares. Isso deve-se à ausência dos modos de corpo rígido da base que são, por isso, recuperadas na fase de pós-processamento.

4.5.1. Modos de corpo rígido

Devido ao facto de os elementos de tensão serem baseados na aproximação do campo de tensões no domínio e na aplicação das condições de equilíbrio nas fronteiras essenciais, os elementos finitos híbridos-Trefftz são incapazes de recuperar os modos de corpo rígido, pois estes não produzem qualquer tipo de tensões e, assim sendo, não contribuem para as condições de equilíbrio. É então necessário recuperar estes modos na fase de pós-processamento. Esta recuperação é feita, impondo as condições de compatibilidade em todas as fronteiras com deslocamentos aplicados e nas interiores.

A aproximação dos deslocamentos no domínio de um elemento finito é dada por,

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{X} + \boldsymbol{\Psi}_R \mathbf{R} \quad (4.10)$$

onde, $\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_r \\ \boldsymbol{\Psi}_\theta \end{bmatrix}$ são as bases de deslocamentos (3.36) e (3.43), usadas previamente, \mathbf{X} os

pesos calculados na fase de processamento, $\boldsymbol{\Psi}_R = \begin{bmatrix} 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ r & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ os três modos de

corpo rígido, $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_r \\ r_x \\ r_y \end{bmatrix}$ os deslocamentos de corpo rígido, em que r_r é a rotação de corpo

rígido, r_x o deslocamento de corpo rígido em X e r_y o deslocamento de corpo rígido em Y

As equações que permitem calcular os deslocamentos de corpo rígido são obtidas impondo em forma fraca todas as equações de compatibilidade nas fronteiras, tanto exteriores como interiores.

Nas fronteiras exteriores, os deslocamentos são impostos nas direcções normal e tangencial. Assim sendo, temos,

$$\int_{\Gamma_u} \mathbf{W}^T (\boldsymbol{\Psi} \mathbf{X} + \boldsymbol{\Psi}_R \mathbf{R}) d\Gamma_u = \int_{\Gamma_u} \mathbf{W}^T \mathbf{u}_\Gamma d\Gamma_u \quad (4.11)$$

onde, \mathbf{u}_Γ são os deslocamentos aplicados na fronteira exterior e a base de ponderação \mathbf{W} é definida como,

$$\mathbf{W} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & s & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & s \end{array} \right] \quad (4.12)$$

Sendo, portanto, idêntica à matriz \mathbf{Z} (4.2) com bases de grau 1.

Separando, na equação (4.11) os termos conhecidos (à direita) e desconhecidos (à esquerda), obtém-se,

$$\int_{\Gamma_u} \mathbf{W}^T \boldsymbol{\Psi}_R d\Gamma_u \mathbf{R} = \int_{\Gamma_u} \mathbf{W}^T \mathbf{u}_\Gamma d\Gamma_u - \int_{\Gamma_u} \mathbf{W}^T \boldsymbol{\Psi} d\Gamma_u \mathbf{X} \quad (4.13)$$

Fazendo as definições,

$$\mathbf{B}_R = \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\Psi}_R^T \mathbf{W} d\Gamma_u \quad (4.14)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_{\Gamma_d} = \int_{\Gamma_u} \mathbf{W}^T \mathbf{u}_{\Gamma} d\Gamma_u \quad (4.15)$$

$$\mathbf{B}_d = \int_{\Gamma_{ext}} \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{W} d\Gamma_{ext} \quad (4.16)$$

obtém-se então a forma simplificada da equação (4.13),

$$\mathbf{B}_R^T \mathbf{R} = \bar{\mathbf{u}}_{\Gamma_d} - \mathbf{B}_d^T \mathbf{X} \quad (4.17)$$

De notar que, para os deslocamentos dos elementos, todas as funções forma das bases $\boldsymbol{\Psi}$ e $\boldsymbol{\Psi}_R$ devem ser projectadas nas direcções normal e tangencial para se poderem impor as condições cinemáticas \mathbf{u}_{Γ} .

No caso das fronteiras interiores, considerando uma fronteira entre os elementos i e j impõe-se que,

$$\int_{\Gamma_u} \mathbf{W}^T (\boldsymbol{\Psi}_i \mathbf{X}_i + \boldsymbol{\Psi}_{Ri} \mathbf{R}_i) d\Gamma_u - \int_{\Gamma_u} \mathbf{W}^T (\boldsymbol{\Psi}_j \mathbf{X}_j + \boldsymbol{\Psi}_{Rj} \mathbf{R}_j) d\Gamma_u = \mathbf{0} \quad (4.18)$$

Considerando as definições (4.14), (4.15) e (4.16) a equação (4.18) assume a seguinte forma,

$$\mathbf{B}_{Ri}^T \mathbf{R}_i - \mathbf{B}_{Rj}^T \mathbf{R}_j = -\mathbf{B}_{di}^T \mathbf{X}_i + \mathbf{B}_{dj}^T \mathbf{X}_j \quad (4.19)$$

Cada elemento tem três modos de corpo rígido, assim sendo, o número total de incógnitas no sistema (4.17) e (4.19) é igual ao número de elementos multiplicado por três.

Existem duas equações para cada direcção com deslocamentos impostos, tanto nas fronteiras exteriores como interiores. Deste modo, o número total de equações é duas vezes o número de direcções onde se impõem equações de compatibilidade. O sistema (4.17) resulta, geralmente sobre-condicionado, sendo a solução obtida usando a pseudo-inversa.

4.5.2. Campos de soluções

A solução do sistema resolutivo (3.54) fornece apenas uma estimativa do campo de tensões, tanto no domínio como nas fronteiras. Este campo é obtido partindo da aproximação das tensões (3.1),

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}\mathbf{X} \quad (4.20)$$

Fica igualmente definida uma única estimativa para o campo de deslocamentos no interior dos elementos,

$$u = \Psi X + \Psi_R R \quad (4.21)$$

5. Resultados e discussão

5.1. Introdução

Neste capítulo, o programa desenvolvido neste trabalho é testado e aplicado na resolução de problemas de elasticidade plana, com o propósito de avaliar o seu desempenho e eficiência.

Os testes numéricos apresentados de seguida pretendem avaliar a convergência dos elementos híbridos-Trefftz, comparando, em casos relativamente simples, os resultados obtidos com estes elementos com soluções analíticas. Para casos de maior complexidade, os resultados obtidos utilizando a presente formulação são comparados com resultados apresentados por outros investigadores, e obtidos por programas de cálculo automático que utilizam elementos finitos convencionais. A convergência é controlada através de refinamentos ρ e h , o primeiro feito através do aumento da ordem das bases de aproximação nos domínios e fronteiras essenciais, e o segundo através do aumento do número de elementos na malha.

Nas soluções estimadas pelo método dos elementos finitos, os resultados apresentam erros se comparados com os resultados reais. Estes erros podem ter origens diversas, podendo originar da modelação do problema, da discretização do modelo, da escolha das funções de aproximação ou da precisão numérica. Os erros que surgem da modelação do problema têm origem na transposição da realidade física para o modelo matemático, pois esta baseia-se em hipóteses simplificativas que não reproduzem, geralmente, o comportamento real. Os erros que resultam da discretização do modelo surgem da divisão do domínio em subdomínios através da malha de elementos finitos. Os erros que surgem da escolha das funções de aproximação vêm do facto das bases não conterem, em regra, a solução exacta do modelo matemático adoptado. Os erros de precisão numérica ocorrem por causa da precisão finita dos processos de cálculo utilizados no programa.

Dos erros listados anteriormente, os que dependem do desempenho da formulação de elementos finitos são os que vêm da discretização do modelo (refinamento h) e da qualidade das funções de aproximação (refinamento ρ). A análise destes erros permite, portanto, avaliar o desempenho da formulação proposta neste trabalho.

De seguida, procede-se à validação do programa através de um problema com solução analítica conhecida, comparando o resultado obtido pela formulação de elementos finitos híbridos-Trefftz com a solução analítica e com a obtida com elementos finitos convencionais.

Depois dessa validação, são apresentados três casos de estudo mais complexos, uma placa em L [35], o painel de Cook [36] e uma placa com orifício circular [36]. A avaliação da convergência e da qualidade da solução é feita a partir da análise do erro da energia de deformação, bem como dos erros dos campos de tensões e deslocamentos. Os resultados obtidos através da presente formulação são comparados com os obtidos por um programa que utiliza elementos finitos convencionais e outro programa que utiliza elementos finitos híbridos-Trefftz de tensão.

5.2. Validação do programa

Antes de se utilizar o programa desenvolvido neste trabalho para resolver casos de maior complexidade, procede-se à sua validação num problema simples com solução analítica conhecida.

Esta validação é feita em duas etapas distintas. Primeiro, comparam-se os resultados obtidos pelo programa de elementos finitos híbridos-Trefftz de tensão com a solução analítica do problema de uma viga em consola com uma carga na ponta derivada por Timoshenko [37]. Posteriormente, o mesmo tipo de problema é resolvido com um programa de cálculo automático que utiliza elementos conformes de deslocamento, no caso o SAP2000, o que permite a comparação dos desempenhos dos elementos finitos convencionais e híbridos-Trefftz.

5.2.1. Viga de Timoshenko

A viga de Timoshenko é uma viga em consola com um carregamento aplicado na extremidade livre.

A viga tem um comprimento L , uma largura $b=1$ e uma altura $h=2c$, é encastrada em $X=L$ e sujeita a um estado de tensão plana provocado por uma carga tangencial P aplicada em $X=0$, Figura 5.1.

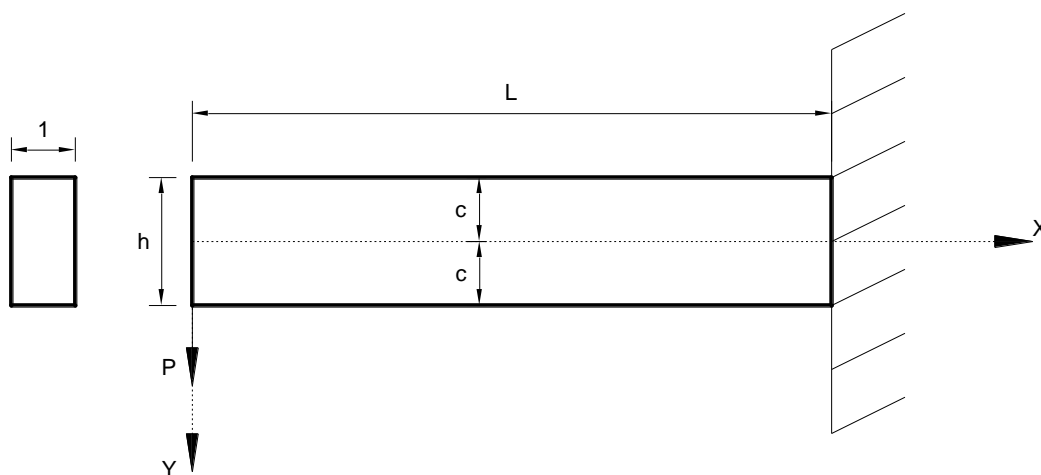


Figura 5.1: Viga de Timoshenko.

Para esta consola, soluções analíticas aceitáveis no vão da mesma foram apresentadas por Timoshenko [37]. As variações dos campos das tensões normais e tangenciais são, assim, dadas pelas seguintes expressões:

$$\begin{cases} \sigma_x(X,Y) = -\frac{3}{2} \frac{P}{c^3} XY \\ \sigma_y(X,Y) = 0 \\ \tau_{xy}(X,Y) = -\frac{3P}{4c} \left(1 - \frac{Y^2}{c^2}\right) \end{cases} \quad (5.1)$$

Aplicando a lei de Hooke aos campos de tensões (5.1), as seguintes expressões são obtidas para os campos de deformações,

$$\begin{cases} \varepsilon_x(X,Y) = -\frac{PXY}{EI} \\ \varepsilon_y(X,Y) = \frac{\nu PXY}{EI} \\ \gamma_{xy}(X,Y) = -\frac{P}{2IG} (c^2 - Y^2) \end{cases} \quad (5.2)$$

onde, $I = \frac{bh^3}{12}$ é o momento de inércia da secção da consola, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ é o módulo de

corte do material, E é o módulo de Young e ν o coeficiente de Poisson. Os campos de deslocamentos horizontal e vertical são,

$$\begin{cases} u_x(X,Y) = -\frac{PX^2Y}{2EI} - \frac{\nu PY^3}{6EI} + \frac{PY^3}{6IG} + \left(\frac{PL^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2GI}\right)Y \\ u_y(X,Y) = \frac{\nu PXY^2}{2EI} + \frac{PX^3}{6EI} - \frac{PL^2X}{2EI} + \frac{PL^3}{3EI} \end{cases} \quad (5.3)$$

De referir que os campos de tensões (5.1) não correspondem à aplicação de uma carga P concentrada, mas sim a uma carga parabólica com resultante igual a P . Igualmente, o campo de deslocamentos na extremidade $X = L$, não corresponde na realidade a um encastramento, tendo uma ligeira variação, apresentada na Figura 5.2. Contudo, em pontos suficientemente afastados das extremidades, pelo princípio de St. Venant, as soluções (5.1) a (5.3) são muito próximas das reais.



Figura 5.2: Viga de Timoshenko: Deformação da viga em $X = L$ [37].

Como o objectivo dos testes de convergência é recuperar as soluções analíticas, foram aplicadas nas fronteiras laterais condições condizentes com as definições (5.1) e (5.3), em vez de força concentrada e encastramento puro.

Para o presente teste, os resultados foram obtidos para os seguintes parâmetros geométricos, $L=10$, $c=1$, $h=2$ e $P=10$. As propriedades mecânicas do material considerado são $E=10$ e $\nu=0,2$.

Com os campos de tensão e deformação conhecidos é possível calcular a energia de deformação através da expressão (3.57). Assim, o valor exacto da energia de deformação para a viga de Timoshenko é,

$$E_{VT} = 857, (3) \quad (5.4)$$

5.2.2. Validação com a solução analítica

Medindo o erro da energia de deformação é possível testar o programa desenvolvido e quantificar a sua convergência sob refinamentos 'h' e 'p'. O erro da energia de deformação é definido pela seguinte expressão,

$$\varepsilon_T = \left| 1 - \frac{E_{EFHTT}}{E_{VT}} \right| \quad (5.5)$$

onde, E_{EFHTT} é a energia de deformação obtida pelo método dos elementos finitos híbridos-Trefftz de tensão e E_{VT} é a solução analítica.

Para este teste, são utilizados quatro níveis de refinamento 'h', que correspondem a um, dois, quatro e oito elementos. A distribuição destes elementos é apresentada na Figura 5.3.

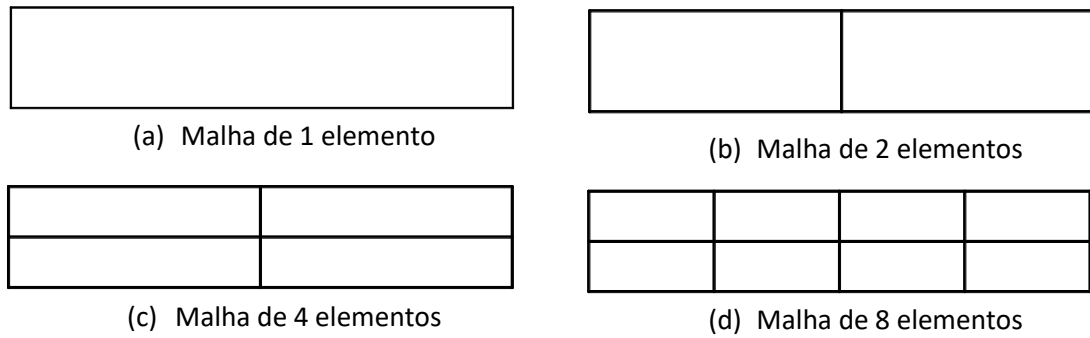


Figura 5.3: Viga de Timoshenko: Malhas utilizadas no programa de elementos finitos híbridos-Trefftz.

Para quantificar a convergência da solução sob refinamento 'p', faz-se variar a ordem das funções de aproximação nos domínios dos elementos (n_D), e os graus dos polinômios nas suas fronteiras essenciais (n_Γ). As combinações consideradas são apresentadas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Viga de Timoshenko: Refinamentos 'p'.

n_D	3	5*	7*	9	11*
n_Γ	0	1*	2*	3	4*

Na Figura 5.4 é apresentado um gráfico que demonstra a convergência da energia de deformação através da análise do erro desta, calculado pela relação (5.5) e determinado para os níveis de refinamentos 'h' e 'p' acima descritos, em função do número total de graus de liberdade (N). O eixo das ordenadas está representado em escala logarítmica.

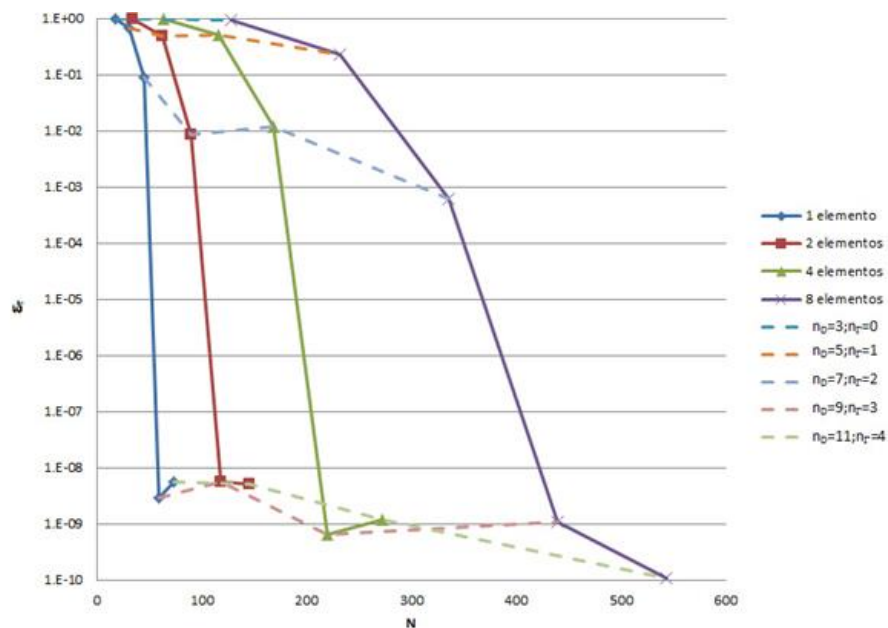


Figura 5.4: Viga de Timoshenko: Erro da energia de deformação (ε_T) em função dos graus de liberdade (N).

Com a análise do gráfico da Figura 5.4, conclui-se que o erro relativo diminui quando o modelo é refinado tanto com refinamentos 'h' (linhas a tracejado) como 'p' (linhas a traço contínuo). É de notar que o refinamento 'p' converge mais rapidamente para uma boa solução que o refinamento 'h' facto patente pela maior inclinação dos gráficos referentes ao primeiro. No refinamento 'p' existe uma acentuação da taxa de convergência na transição dos graus de refinamento de $(n_D = 5; n_T = 1)$ para $(n_D = 9; n_T = 3)$, em que, mesmo para um único elemento, o modelo mais refinado já atinge uma precisão da ordem de 10^{-9} . Tendo em conta que o programa de elementos finitos híbridos-Trefftz de tensão é capaz de recuperar uma boa estimativa da solução para este exemplo, pode-se então assumir como válido.

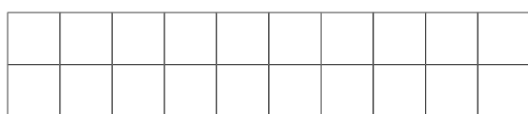
5.2.3. Comparação dos elementos finitos híbridos -Trefftz com os elementos convencionais

Com o processo de validação concluído, segue-se a comparação do desempenho dos elementos finitos híbridos-Trefftz com o dos elementos finitos conformes de deslocamento.

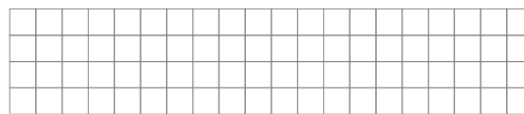
A comparação é realizada para uma versão do problema onde se considera encastramento puro na fronteira $X = L$ e força uniformemente distribuída em $X = 0$. Esta alteração é feita devido à dificuldade da imposição de condições de fronteira de graus elevados no programa SAP2000. De notar que a alteração dificulta consideravelmente o problema, cuja solução passa a apresentar pontos de descontinuidade de tensões tangenciais nas extremidades da zona encastrada.

Os modelos de elementos finitos híbridos-Trefftz de tensão, para este problema, utilizam as malhas descritas na Figura 5.3. e os níveis de refinamento 'p' utilizados são os da tabela 4.1.

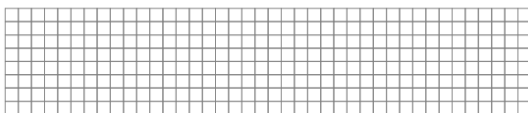
Quatro modelos de elementos finitos conformes de deslocamento são utilizados, contendo nomeadamente 20, 80, 320 e 1280 elementos finitos, conforme representado na Figura 5.5. De notar que o programa de elementos finitos convencionais SAP2000 utiliza elementos rectangulares de 4 nós e funções de aproximação bi-lineares.



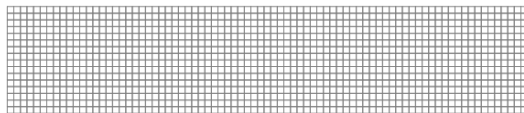
(a) Malha de 10x2 elementos



(b) Malha de 20x4 elementos



(c) Malha de 40x8 elementos



(d) Malhas de 80x16 elementos

Figura 5.5: Viga de Timoshenko: Malhas utilizadas no programa SAP2000.

A comparação entre as soluções envolve os campos de deslocamentos horizontal e vertical e os campos de tensões. Os mesmos são medidos nos pontos A e B indicados na Figura 5.6, situados na secção mediana da barra, em $X=5$. A tensão σ_x e o deslocamento u_x são comparados no ponto A . No ponto B , são comparados a tensão τ_{xy} e os deslocamentos u_y . Estes pontos foram escolhidos a meio vão da viga, de modo a mitigar os efeitos causados pela diferença entre os modelos da distribuição da carga P no programa SAP2000 face à solução de Timoshenko.

São apresentados na Figura 5.7 os gráficos de convergência dos valores das tensões (σ_x e τ_{xy}) e deslocamentos (u_x e u_y) obtidas utilizando elementos finitos híbridos-Trefftz e elementos finitos convencionais. Os valores dos deslocamentos e das tensões são representados em função do número total dos graus de liberdade (N). A abscissa utiliza escala logarítmica. Os marcadores quadrados de cor vermelha indicam as soluções obtidas pelos elementos finitos convencionais com os níveis de refinamento 'h' ilustrados na Figura 5.5. Os outros gráficos correspondem as soluções dos elementos finitos híbridos-Trefftz utilizando os refinamentos 'h' indicados na Figura 5.3 e os refinamentos 'p' ilustrados (com asterisco) na Tabela 5.1. Os valores analíticos dos deslocamentos e tensões são listados na Tabela 5.2.

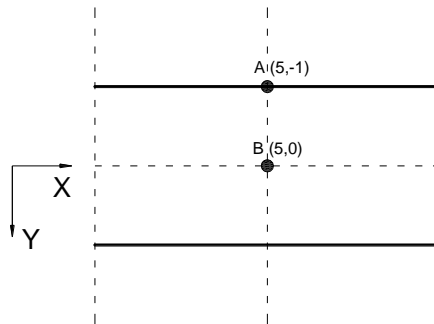


Figura 5.6: Viga de Timoshenko: Pontos onde se comparam as soluções.

Conclui-se com a análise da Figura 5.7 que a convergência é alcançada com menos graus de liberdade nos elementos finitos híbridos-Trefftz do que nos convencionais. Isto deve-se ao facto da informação contida nas bases de aproximação dos elementos finitos híbridos-Trefftz ser calibrada para cada problema individual, enquanto os elementos finitos convencionais utilizam sempre as mesmas bases de aproximação para todos os problemas, em que usa o mesmo tipo de elementos.

No entanto, as funções de aproximação das bases híbridas-Trefftz são mais exigentes em termos de esforço computacional, necessitando de um elevado número de pontos de quadratura para a integração numérica, pelo que, quando comparado com os elementos convencionais, o tempo computacional pode não ser muito inferior.

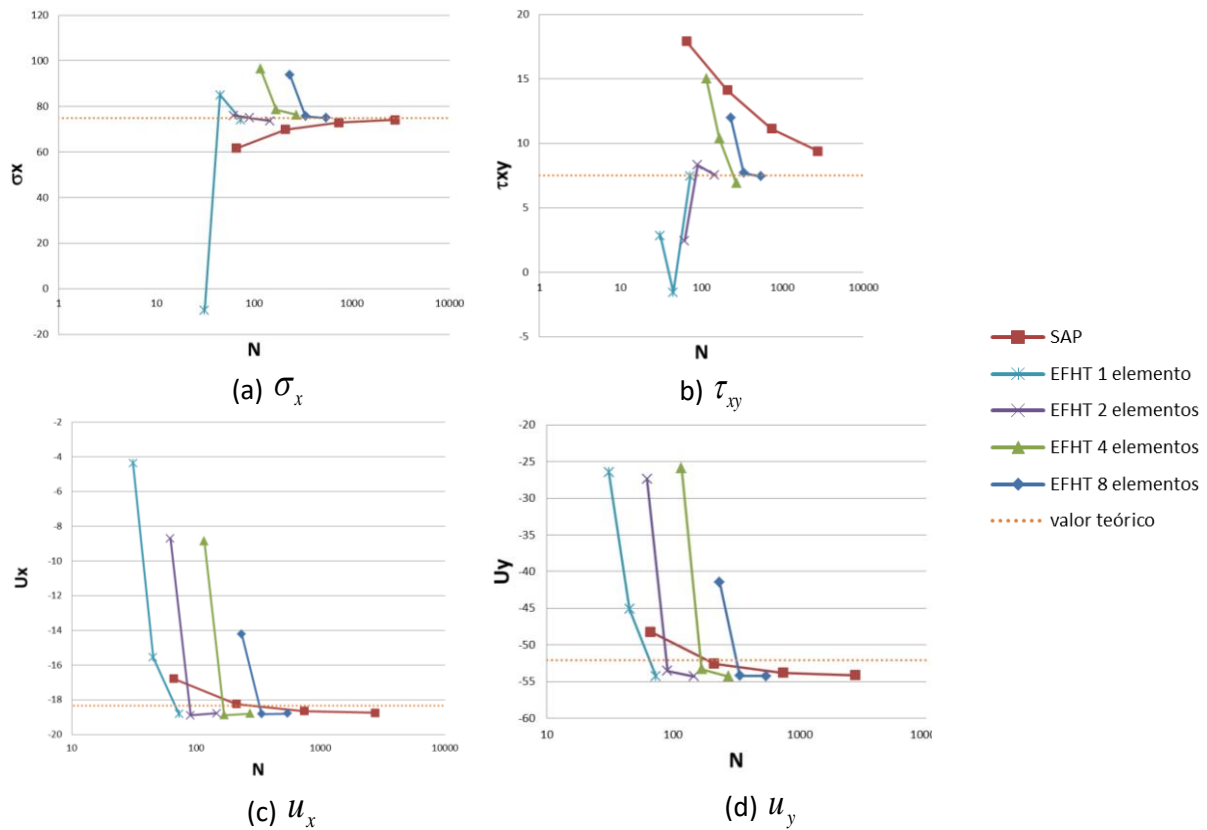


Figura 5.7: Viga de Timoshenko: Convergência dos campos σ_x , τ_{xy} , u_x e u_y .

Comparando então os tempos computacionais dos dois programas, ambos para os modelos mais refinados, o programa de elementos finitos híbridos-Trefftz para 8 elementos e $n_D = 11; n_T = 4$ durou cerca 1.20 segundos, e o programa SAP2000 para 1280(80x16) elementos durou cerca de 1 segundo. Apesar da diferença não ser notória, o programa de elementos finitos híbridos-Trefftz apresenta melhor qualidade dos resultados. Na Tabela 5.2, apresenta-se a comparação entre as tensões e os deslocamentos registados nos pontos *A* e *B* pelos elementos finitos híbridos-Trefftz e convencionais (nos casos mais refinados) e pela solução analítica de Timoshenko.

Tabela 5.2: Comparação dos valores dos campos de tensões e deslocamentos recuperados pelos elementos finitos com a solução analítica de Timoshenko.

	σ_x	τ_{xy}	u_x	u_y
Timoshenko	75.00	7.50	-18.33	-52.08
EFHT	74.98	7.44	-18.80	-54.26
SAP2000	74.09	9.39	-18.76	-54.13

De modo a ilustrar a qualidade das soluções obtidas com as duas formulações de elementos finitos, são apresentados nas Figura 5.8 e Figura 5.9 os campos de tensões recuperados pelas formulações híbrida-Trefftz e convencional, respectivamente. No caso dos elementos finitos híbridos-Trefftz de tensão, os campos são apresentados para o caso de maior refinamento da malha e todos os refinamentos 'p' que foram testados. Para os mesmos

casos, apresentam-se nas Figura 5.10 e Figura 5.11 os campos de deslocamentos. Todos os gráficos são feitos na forma deformada da estrutura.

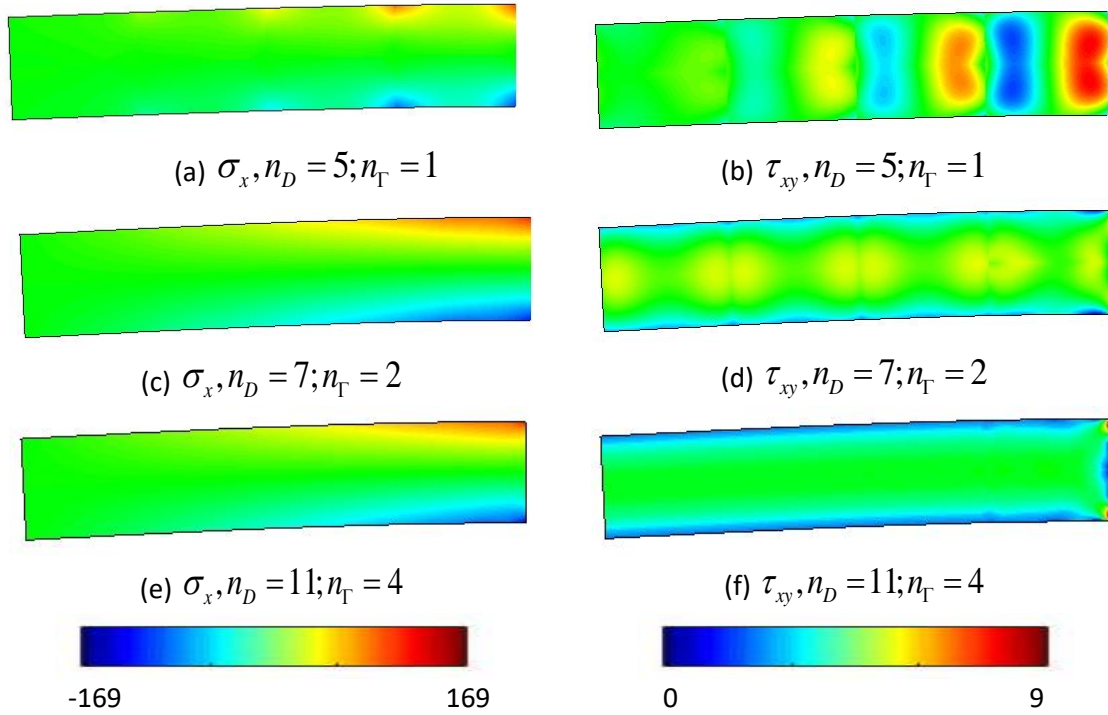


Figura 5.8: Viga de Timoshenko: Campos de tensões previstos pelos elementos finitos híbridos-Trefftz.

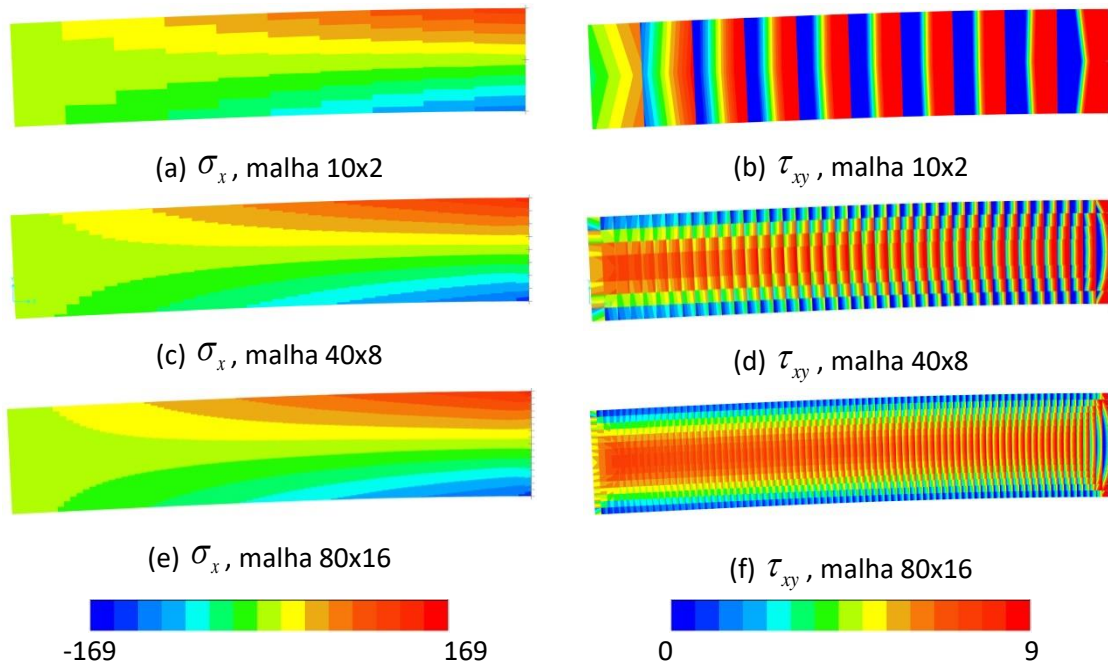


Figura 5.9: Viga de Timoshenko: Campos de tensões previstos pelos elementos finitos convencionais.

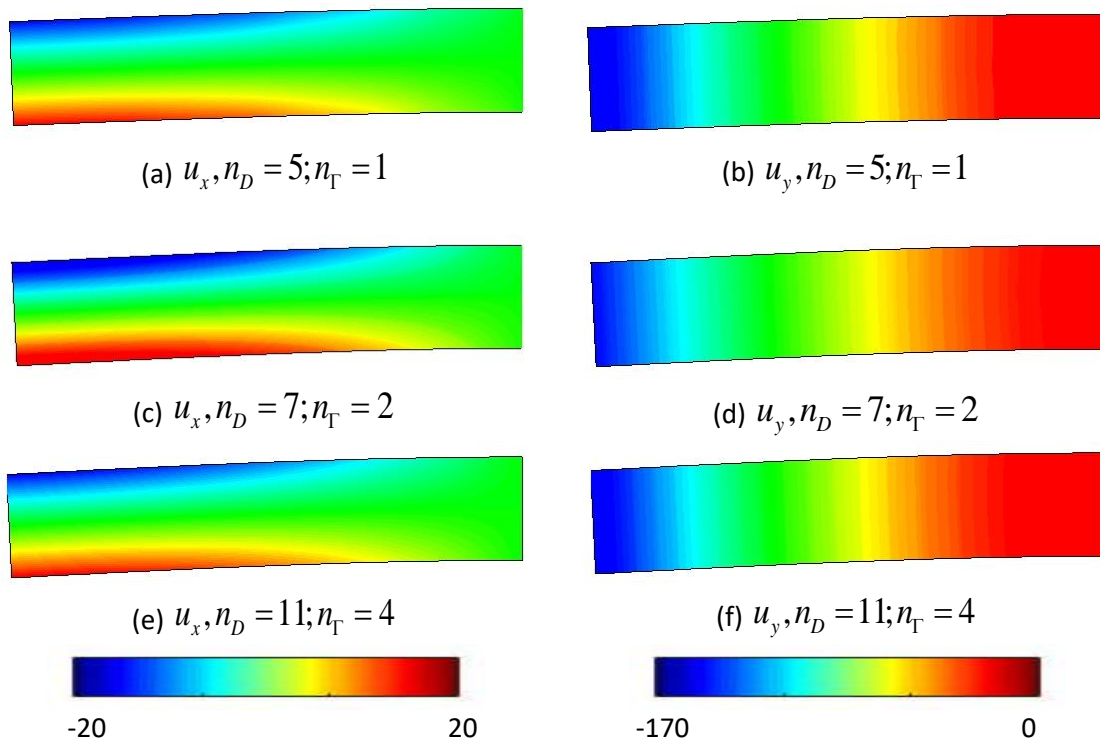


Figura 5.10: Viga de Timoshenko: Campos de deslocamento previstos pelos elementos finitos híbridos-Trefftz.

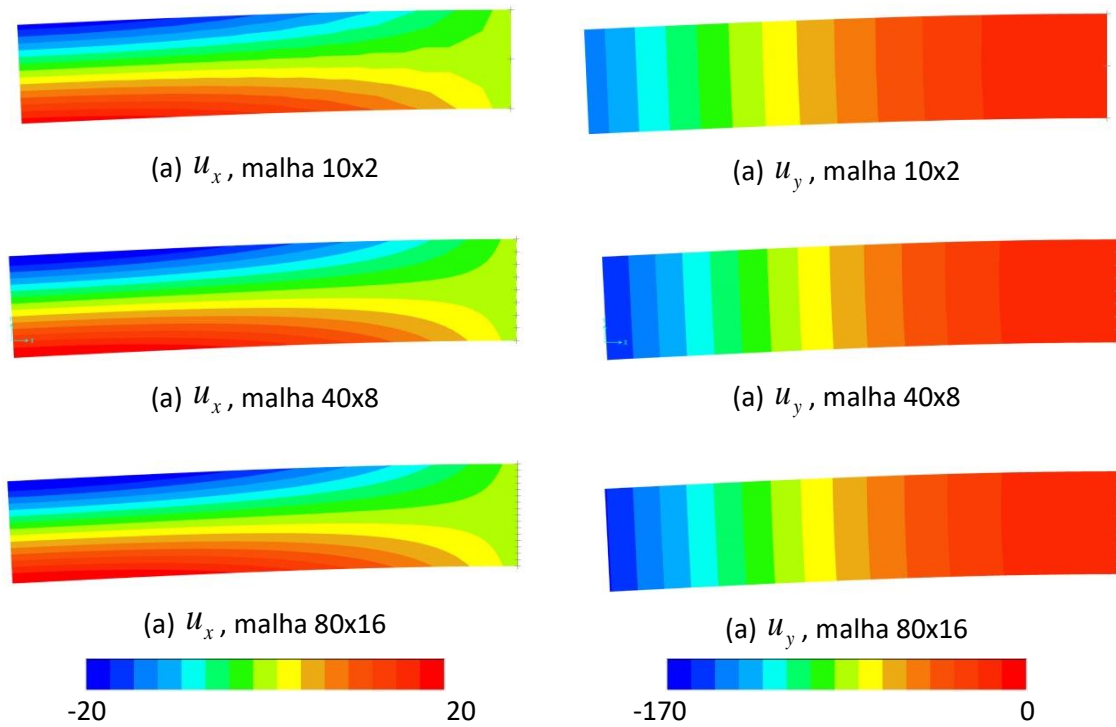


Figura 5.11: Viga de Timoshenko: Campos de deslocamento previstos pelos elementos finitos convencionais.

A análise dos campos de tensão dos elementos finitos convencionais apresentados na Figura 5.9 revela que, mesmo para modelos com refinamentos mais altos, existe uma descontinuidade marcada das tensões, principalmente visível no campo de tensões tangenciais, que este modelo sobrestima consideravelmente. Pelo contrário, nos elementos finitos híbridos-Trefftz, a continuidade das tensões tangenciais consegue ser recuperada à medida que se refina o modelo. Esta diferença entre os modelos é identificada na Tabela 5.2 e assim justificada. Como referido na secção 2.1, o facto dos elementos finitos híbridos-Trefftz não serem nem localmente equilibrados, nem localmente compatíveis, permite que os mesmos apresentem estimativas de tensões e deslocamentos qualitativamente muito mais equilibradas do que os elementos finitos convencionais.

Nas extremidades da fronteira $X = L$, os elementos finitos híbridos-Trefftz conseguem recuperar bem o efeito da descontinuidade das tensões tangenciais, embora as aproximações só possam ser contínuas dentro do elemento. A melhor maneira de lidar com estas situações é utilizar elementos diferentes de um lado e do outro dos pontos de descontinuidade, para assim permitir a ocorrência de campos descontínuos. Aumentar o nível de refinamento 'p' também pode ajudar, acrescentando novas funções às bases de aproximação dos elementos.

A análise das Figura 5.10 e Figura 5.11 mostra que para ambos os modelos, tanto na zona do encastramento como ao nível da continuidade interelementar, os deslocamentos são bem recuperados, mesmo para refinamentos baixos. Os elementos híbridos-Trefftz conseguem recuperar sem descontinuidades visíveis as condições de compatibilidade interelementar, apesar de as mesmas não serem impostas em forma forte, como acontece no caso dos elementos finitos convencionais. O mesmo é válido para a recuperação do deslocamento imposto em $X = L$.

5.3. Casos de estudo mais complexos

Tendo concluído a fase de validação de programa, prossegue-se, para a análise dos casos de estudo mais complexos.

Estes casos de estudo são caracterizados por estruturas de geometria irregular, descontinuidades nos campos aproximados e, nalguns casos, concentrações de tensões. Por tal motivo, utilizou-se o gerador de malha não-regular em todos os casos.

Os resultados obtidos pelo programa de elementos finitos híbridos-Trefftz são comparados com resultados de outros investigadores, obtidos com diferentes tipos de elementos finitos.

5.3.1. Placa em 'L'

Este caso de estudo é uma placa com a forma de um 'L' em estado plano de tensão, representada na Figura 5.12. A altura e largura desta placa são $2a=100$ e as propriedades mecânicas do material considerado são $E=10^5$ e $\nu=0,3$.

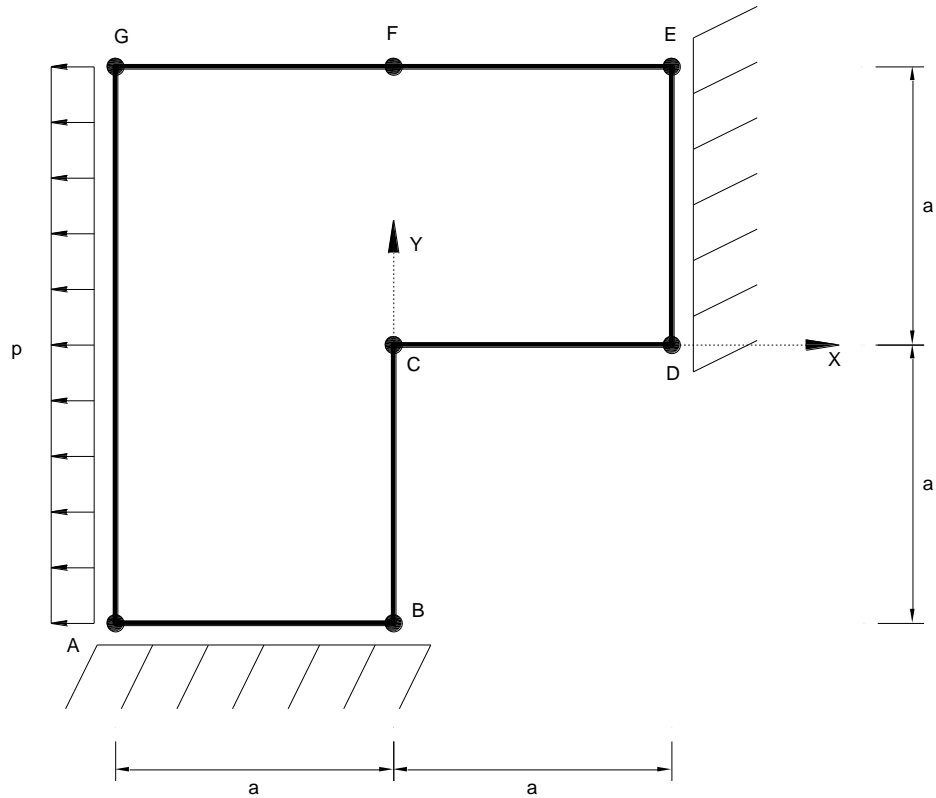


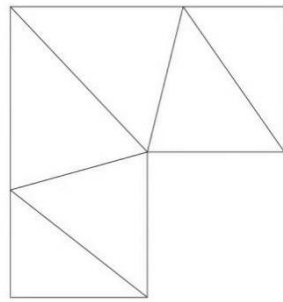
Figura 5.12: Placa 'L'.

Nesta estrutura é aplicada uma carga uniformemente distribuída $p = 1$ na fronteira GA e são restringidos os deslocamentos normais às fronteiras AB e DE por encastramentos deslizantes.

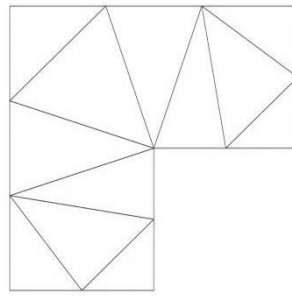
O erro da solução dos elementos finitos híbridos-Trefftz é estimado comparando a energia de deformação prevista pelo modelo com a solução obtida pelo Shephard [35]. A norma desse erro é assim definida como,

$$\varepsilon_L = \left| 1 - \frac{E_{HT}}{E_S} \right| \quad (5.6)$$

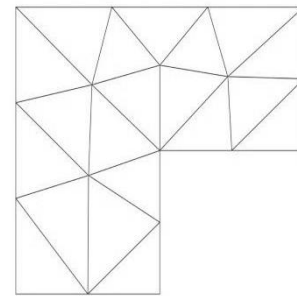
onde, E_{HT} é a solução obtida pelo programa de elementos finitos híbridos-Trefftz e $E_S = 0,1556(6)$ é a solução de referência de Shepard. A energia de deformação do modelo é calculada para três níveis de refinamentos 'h', nomeadamente de 6 elementos, 12 elementos e 20 elementos, representados na Figura 5.13. Para cada malha, são considerados também quatro refinamentos 'p' diferentes, fazendo variar a ordem e os graus atribuídos às bases de aproximação no domínio e fronteiras, respectivamente, de $n_D = 4; n_\Gamma = 1$ a $n_D = 11; n_\Gamma = 6$.



(a) Malhas com 6 elementos



(b) Malhas com 12 elementos



(c) Malhas com 20 elementos

Figura 5.13: Placa em 'L': malhas de elementos elementos finitos híbridos-Trefftz.

A variação da norma do erro da energia de deformação (5.6) em função do número total de graus de liberdade, é apresentada no gráfico da Figura 5.14 para todos os níveis de refinamento testados. Os números totais de graus de liberdade são apresentados no eixo das abscissas, e os erros da energia de deformação são apresentados no eixo (logarítmico) das ordenadas. A convergência sob refinamento 'p' é apresentada por linhas contínuas enquanto que a convergência por refinamento 'h' por linhas a tracejado.

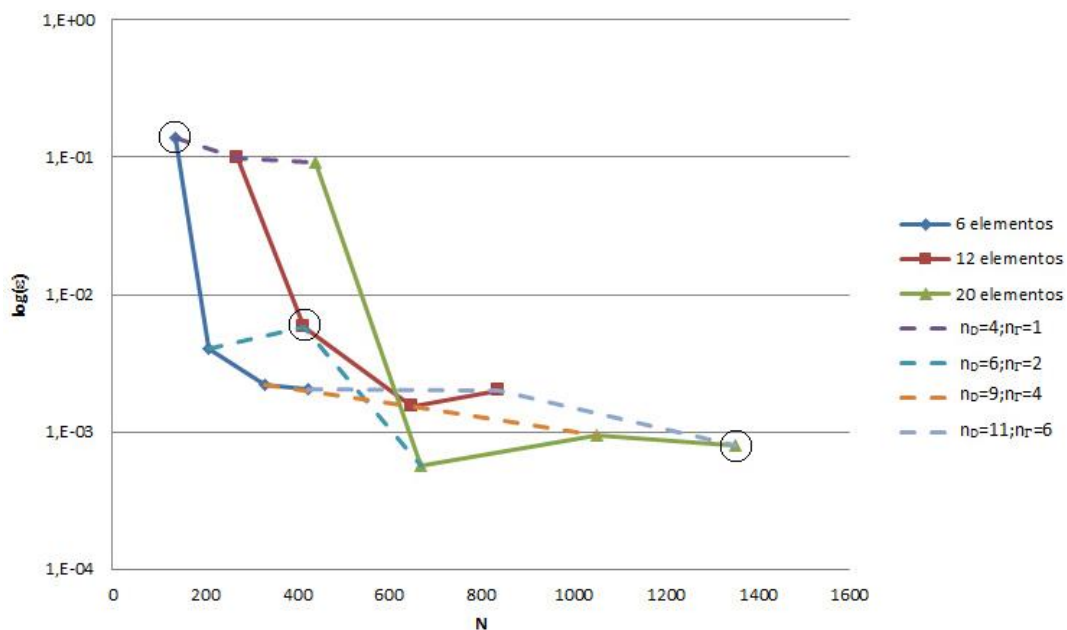


Figura 5.14: Placa em 'L': Erro da energia de deformação em função do número total de graus de liberdade.

Com a análise do gráfico da Figura 5.14 conclui-se que a solução obtida é bem recuperada à medida que se refina o modelo. É possível observar, também, que o refinamento 'p' é mais eficiente do que o refinamento 'h', pois converge mais rápido para uma boa solução, sendo que a melhor solução é obtida usando ambos em simultâneo.

Para refinamentos 'p' de $n_D = 9; n_T = 4$ já se obtém um erro na ordem de 0,2%, ou menor, para qualquer número de elementos utilizados. Contudo, no modelo mais refinado (20 elementos, ordem das funções de aproximação de $n_D = 11; n_T = 6$) o erro é apenas de 0.08%.

Conclui-se, então, que os elementos finitos híbridos-Trefftz recuperam uma boa estimativa, relativa à solução de Shepard, tendo em conta que apresentam erros relativamente reduzidos em comparação com esta.

Nas Figura 5.15 e Figura 5.16 são apresentados, na forma deformada da placa, os campos de tensões e deslocamentos para os refinamentos que correspondem às soluções assinaladas por círculos na Figura 5.14, com o objectivo de se poder avaliar visualmente a continuidade interelementar e a recuperação das condições de fronteira impostas nestes níveis de refinamento.

Para o refinamento mais baixo, o modelo falha na recuperação das condições de fronteira impostas e da continuidade entre elementos, mais para o caso das tensões (Figura 5.15) do que para o de deslocamentos (Figura 5.16). Tal deve-se ao facto do grau das funções das fronteiras ser muito baixo ($n_T = 1$), o que prejudica a imposição das equações de equilíbrio interelementar, e também à falta de refinamento das bases dos elementos ($n_D = 4$), que torna difícil a recuperação dos elevados gradientes dos campos de tensões, que são, por isso, menos bem representadas do que os campos de deslocamentos, cuja variação é mais suave.

Para os modelos mais refinados, as soluções de tensão melhoram consideravelmente. A continuidade entre elementos é bem conseguida, embora no modelo de 12 elementos ainda se notem algumas falhas, principalmente nas tensões tangenciais. Contudo, no modelo mais refinado a continuidade interelementar já se recupera correctamente. Quanto à recuperação das condições de fronteira impostas, a tensão tangencial nula e a tensão imposta em $X = 0$ são bem recuperadas pelos dois modelos mais refinados. Consegue-se notar ainda o bolbo de tensões gerado pela singularidade no vértice C, onde, mesmo não utilizando bases de aproximação com funções específicas para tratar tensões localmente elevadas, o modelo de elementos finitos híbridos-Trefftz recupera com boa qualidade os altos gradientes de tensão.

Quanto aos campos de deslocamentos, com a análise da Figura 5.16 conclui-se que são bem recuperadas as condições de fronteira, recuperando-se deslocamentos normais nulos nos encastramentos deslizantes, isto é, $u_x = 0$ em $X = a$ e $u_y = 0$ em $Y = -a$, e a continuidade interelementar também é bem conseguida, mesmo para o refinamento mais baixo.

Conclui-se, então que os elementos finitos híbridos-Trefftz conseguem modelar de forma bastante satisfatória o problema da placa em 'L', apesar do número relativamente baixo de graus de liberdade (que nunca ultrapassa os 1400) e da ausência de quaisquer funções de enriquecimento que facilitassem a recuperação dos altos gradientes de tensão presentes no vértice interior da placa.

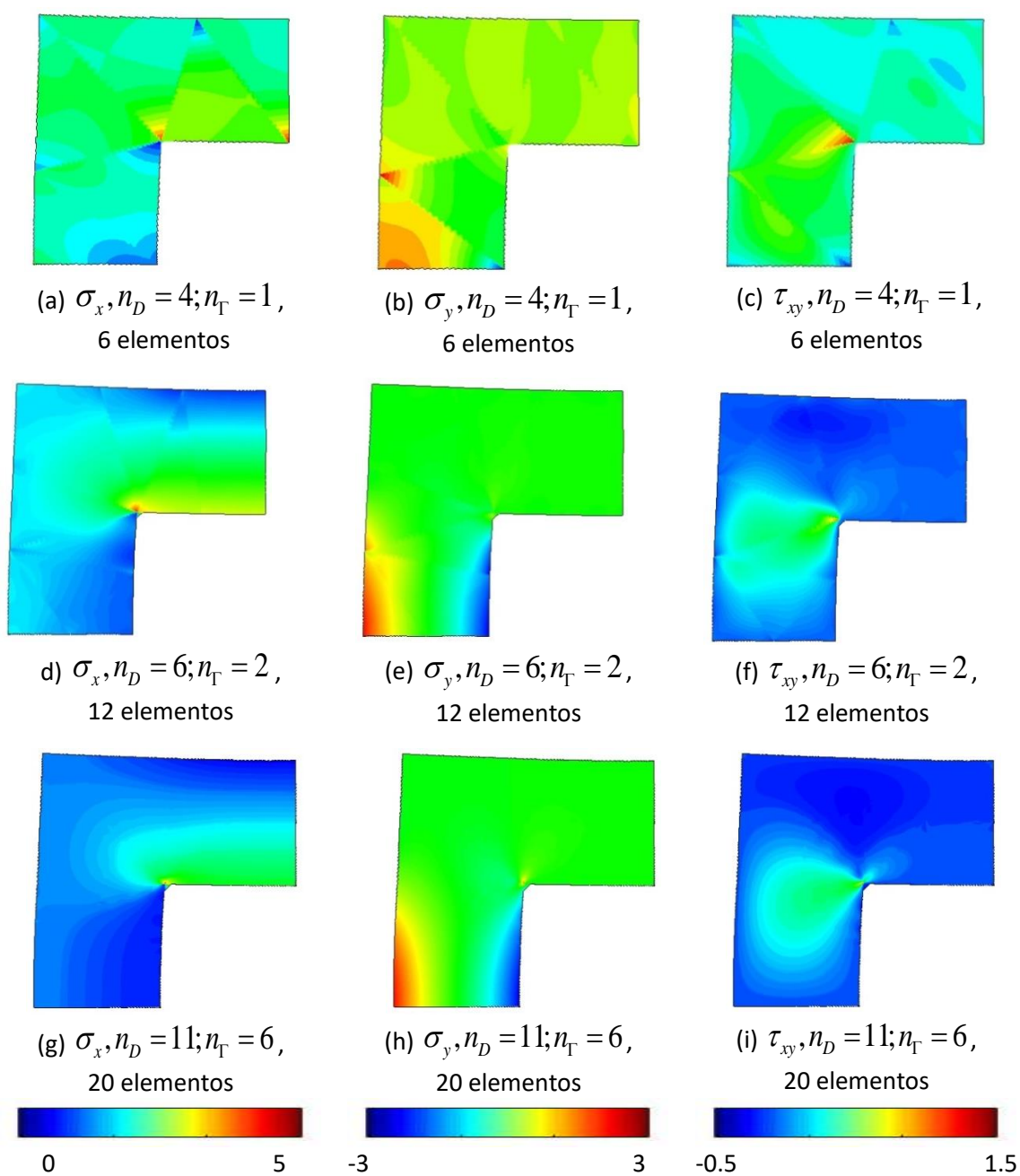


Figura 5.15: Placa em 'L': Campos de tensões.

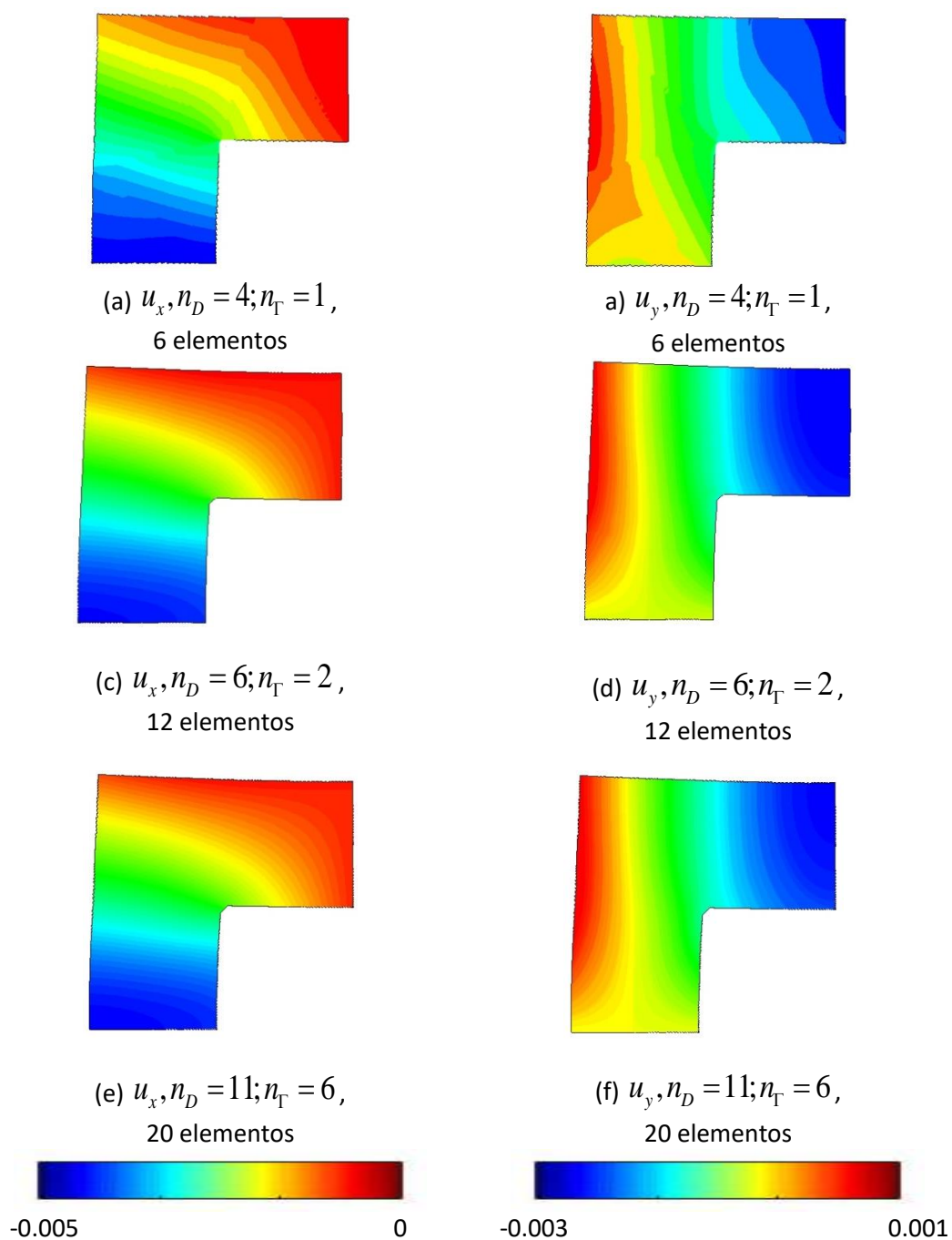


Figura 5.16: Placa em 'L': Campos de deslocamento.

5.3.2. Painel de Cook

Este caso de estudo é um painel de Cook, apresentado na Figura 5.17. Trata-se de uma placa em estado plano de tensão, com um encastramento na fronteira $X = 0$ e uma carga tangencial (P) uniformemente distribuída na fronteira $X = 48$.

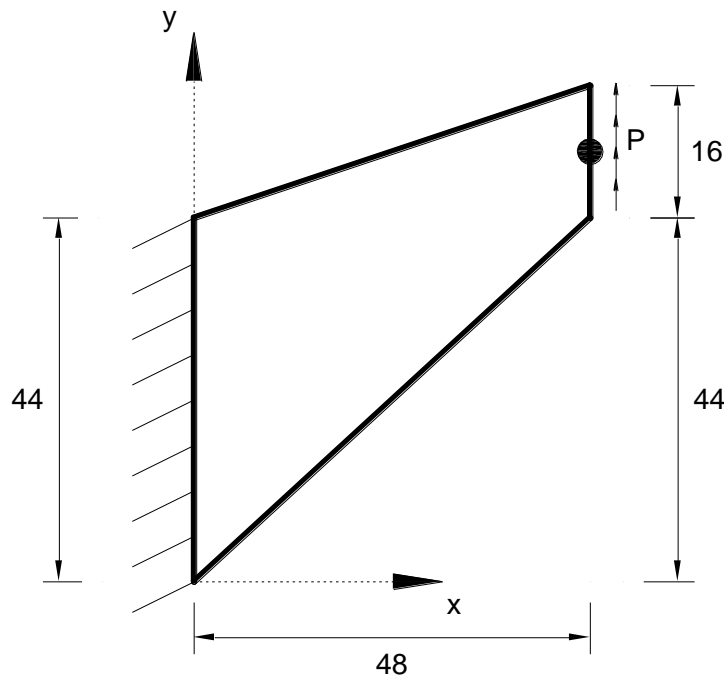


Figura 5.17: Painel de Cook.

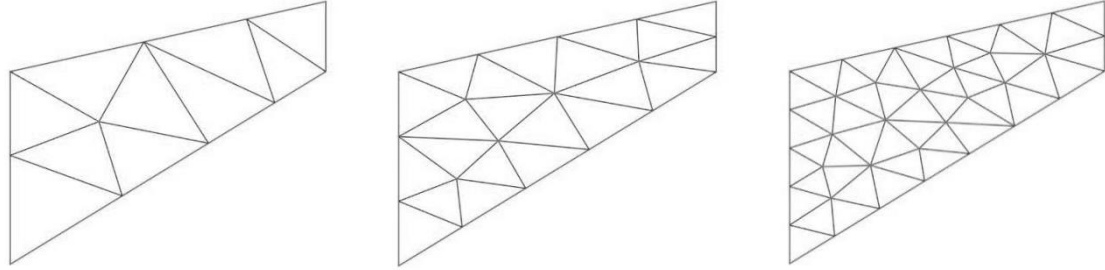
Este problema foi modelado por Souza [36] para um carregamento $P = 0,0625$ e considerando um material com as propriedades mecânicas $E = 1$ e $\nu = 1/3$, usando um programa de cálculo automático baseado na formulação de elementos conformes de deslocamentos (ANSYS). O modelo foi composto por uma malha de 969 elementos triangulares de 6 nós (i.e. segundo grau) com 4144 graus de liberdade. As soluções obtidas por Souza que dizem respeito aos campos de deslocamentos no ponto A e tensões no ponto B (Figura 5.17), são utilizadas para a comparação com as soluções obtidas pela formulação de elementos finitos híbridos-Trefftz.

São tomados como referência os valores da tensão principal máxima no ponto B , $\sigma_{\max} = 0,2368$, e o deslocamento vertical no ponto A , $u_y = 23,95$ [36].

Utilizam-se 3 níveis de refinamentos h para a modelação do painel de Cook, de 10, 22 e 48 elementos como ilustrado na Figura 5.18.

Para cada um dos modelos apresentados na Figura 5.18, é avaliada a influência do refinamento p na convergência dos resultados através da aplicação de diferentes níveis do

mesmo, fazendo variar as ordens das funções de aproximação nos domínios e os graus dos polinómios de aproximação nas fronteiras de $n_D = 4; n_\Gamma = 1$ a $n_D = 11; n_\Gamma = 6$.



(a) Malhas com 10 elementos (b) Malhas com 22 elementos (c) Malhas com 48 elementos

Figura 5.18: Painel de Cook: malhas de elementos finitos híbridos-Trefftz.

A tensão principal máxima é calculada pela seguinte expressão,

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\left(\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (5.7)$$

A convergência do modelo é verificada através da comparação da tensão máxima e do deslocamento vertical obtidos nos pontos B e A , respectivamente, com os respectivos valores obtidos por Souza. As variações dessas quantidades com o refinamento do modelo são representadas nos gráficos das Figura 5.19 e Figura 5.20. Nos gráficos, no eixo das abcissas é representado o número total dos graus de liberdade (N) e as ordenadas, a tensão máxima (σ_{\max}) no ponto B e o deslocamento vertical no ponto A (u_y). Cada linha corresponde a um determinado refinamento da malha e vários refinamentos da base de aproximação.

Com a análise do gráfico da Figura 5.19 conclui-se que a solução obtida é bem recuperada à medida que se refina o modelo. Como expectável da análise do caso anterior, existe uma maior eficácia do refinamento 'p' do que do refinamento 'h', visto que a solução converge mais rápido com o primeiro. Tal como anteriormente, a melhor solução vem do uso de ambos os refinamentos.

Relativamente à tensão máxima no ponto A , para qualquer número de elementos, quando se usam funções de aproximação na ordem de $n_D = 6; n_\Gamma = 2$ (i.e. o segundo ponto de cada gráfico), já se consegue obter uma solução muito próxima do expectável. Assim, no modelo de 10 elementos já se obtém uma tensão máxima de 0,2336, que corresponde a um erro de apenas 1,35% em relação à solução de Souza (0,2368). Já o modelo mais refinado apresenta uma tensão máxima no ponto A de 0,2369, que é praticamente idêntica à expectável. De notar que o modelo de 10 elementos com funções de aproximação na ordem de $n_D = 9; n_\Gamma = 4$ já apresenta o mesmo resultado, com apenas 530 graus de liberdade, tendo o mais refinado 3142.

No que toca ao deslocamento vertical no ponto B , a análise da Figura 5.20 é semelhante à da 4.19, na eficácia dos refinamentos 'p' e 'h'. Contudo, para deslocamentos, obtém-se ainda uma melhor solução para funções de aproximação na ordem de $n_D = 6; n_T = 2$, sendo que para 10 elementos o deslocamento obtido é 23,94, solução muito próxima da solução de Souza (23,95).

Nas Figura 5.21 e Figura 5.22 são apresentados, na forma deformada do painel, os campos de tensões e deslocamentos para os níveis de refinamento assinalados na Figura 5.19, com o objectivo de, tal como anteriormente, se poder avaliar visualmente a qualidade destes campos. Mais uma vez, essa qualidade é averiguada pela maneira como o modelo recupera a continuidade interelementar, e as condições de fronteira impostas. Tal como no caso anterior, o modelo menos refinado falha na recuperação das condições de fronteira impostas e da continuidade entre elementos, mais para o caso das tensões (Figura 5.21) do que para o de deslocamentos (Figura 5.22). Como explicado no caso anterior, isto deve-se ao baixo grau das funções de aproximação nas fronteiras ($n_T = 1$), que prejudica a imposição das equações de equilíbrio interelementar, e também à falta de refinamento das bases dos elementos ($n_D = 4$), que torna difícil a recuperação dos elevados gradientes dos campos de tensões, que são, por isso, menos bem representadas do que os campos de deslocamentos, cuja a variação é mais suave.

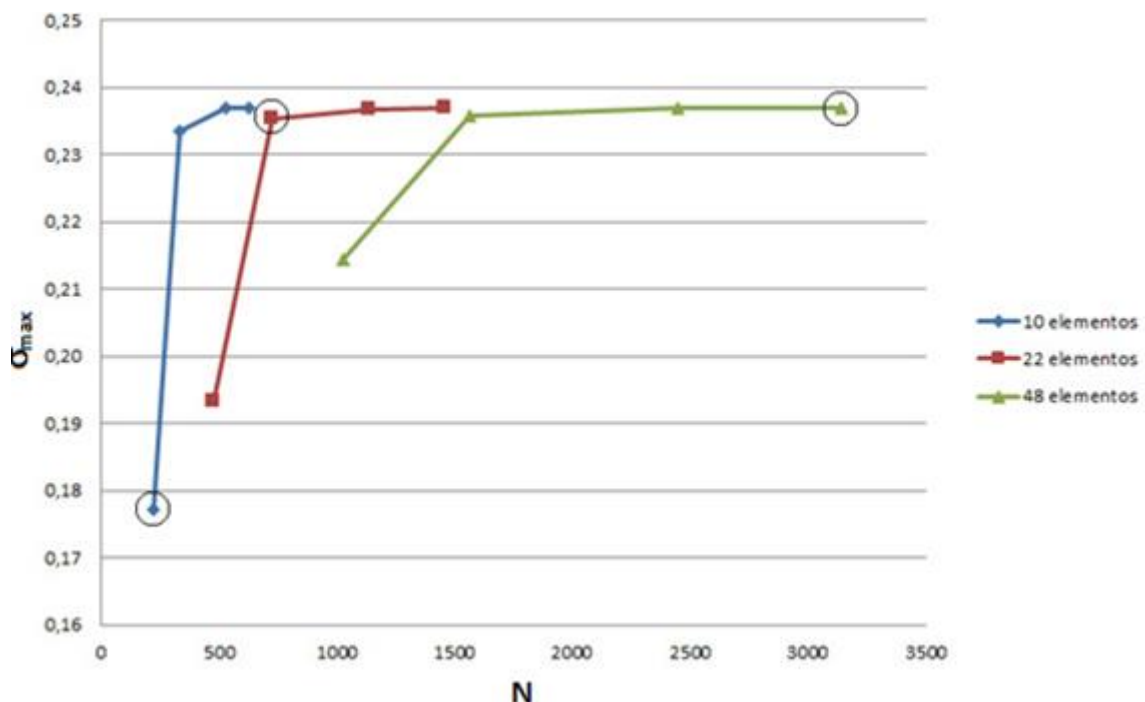


Figura 5.19: Painel de Cook: Variação da tensão máxima no ponto B (σ_{\max}) em função do número total de graus de liberdade (N).

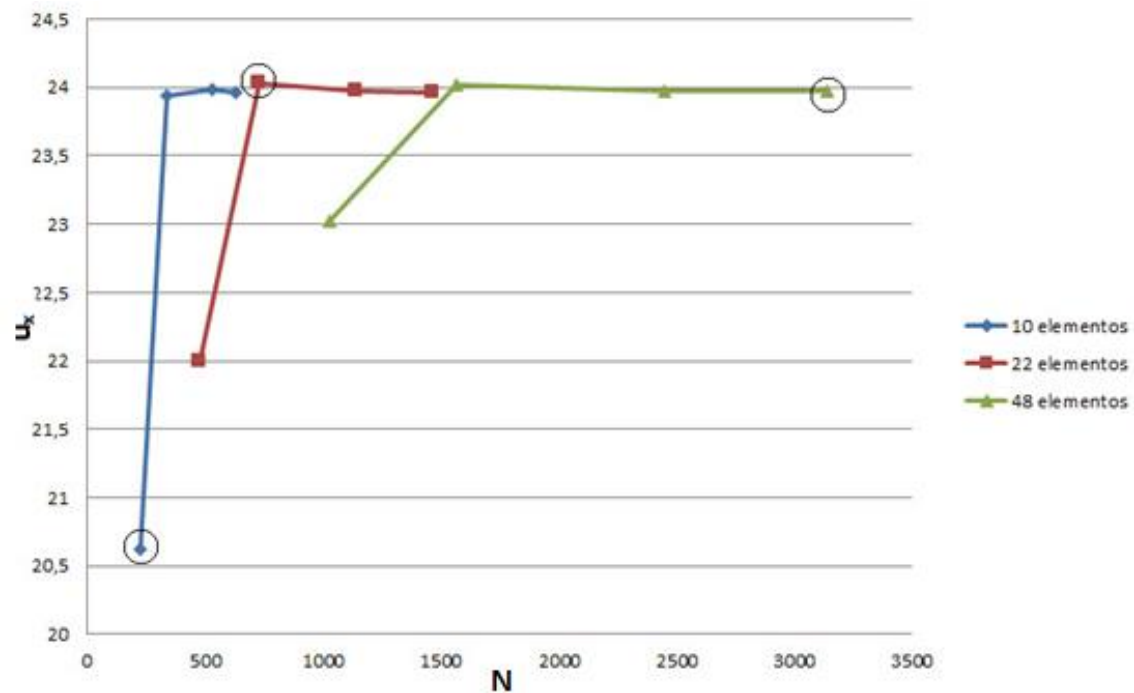


Figura 5.20: Painel de Cook: Variação do deslocamento vertical no ponto A (u_y) em função do número total de graus de liberdade (N).

Nos modelos mais refinados, a melhoria das soluções de tensão é considerável. Consegue-se recuperar a continuidade interelementar, já no modelo de 22 elementos as soluções melhorando ainda mais no modelo mais refinado. Em relação à recuperação das condições de fronteira impostas, a tensão imposta em $X = 48$ é bem recuperada pelos modelos mais refinados. Consegue-se notar ainda que a carga aplicada na extremidade livre da placa faz com que a parte inferior da mesma sofra uma flexão notável, atingindo os campos de tensões os seus valores máximos nesta zona.

Quanto aos campos de deslocamentos, através da análise da Figura 5.22 conclui-se que a continuidade interelementar é bem conseguida mesmo para o refinamento mais baixo e que são bem recuperadas as condições de fronteira, incluindo os deslocamentos nulos na fronteira encastrada.

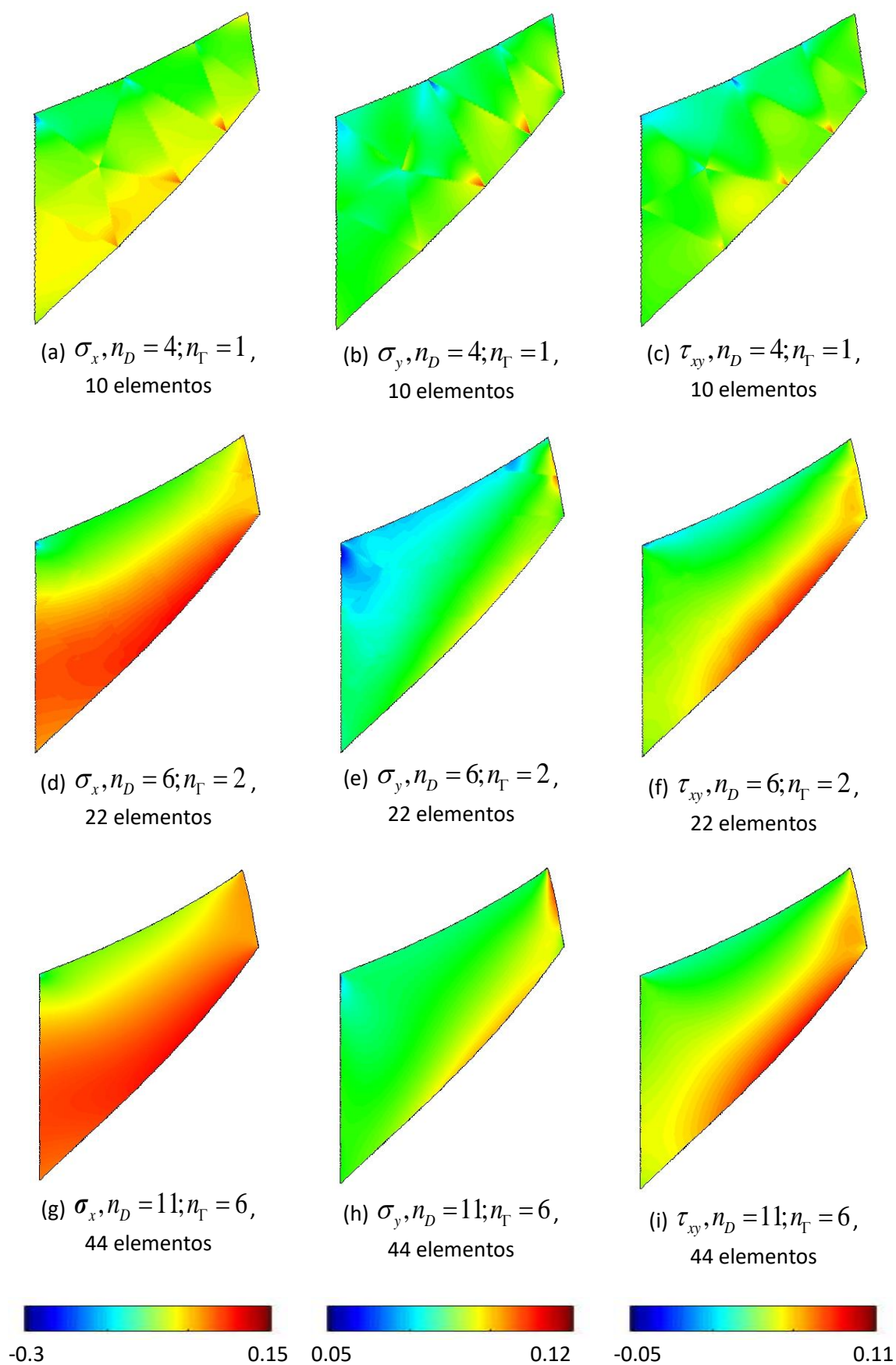


Figura 5.21: Painel de Cook: Campos de tensões.

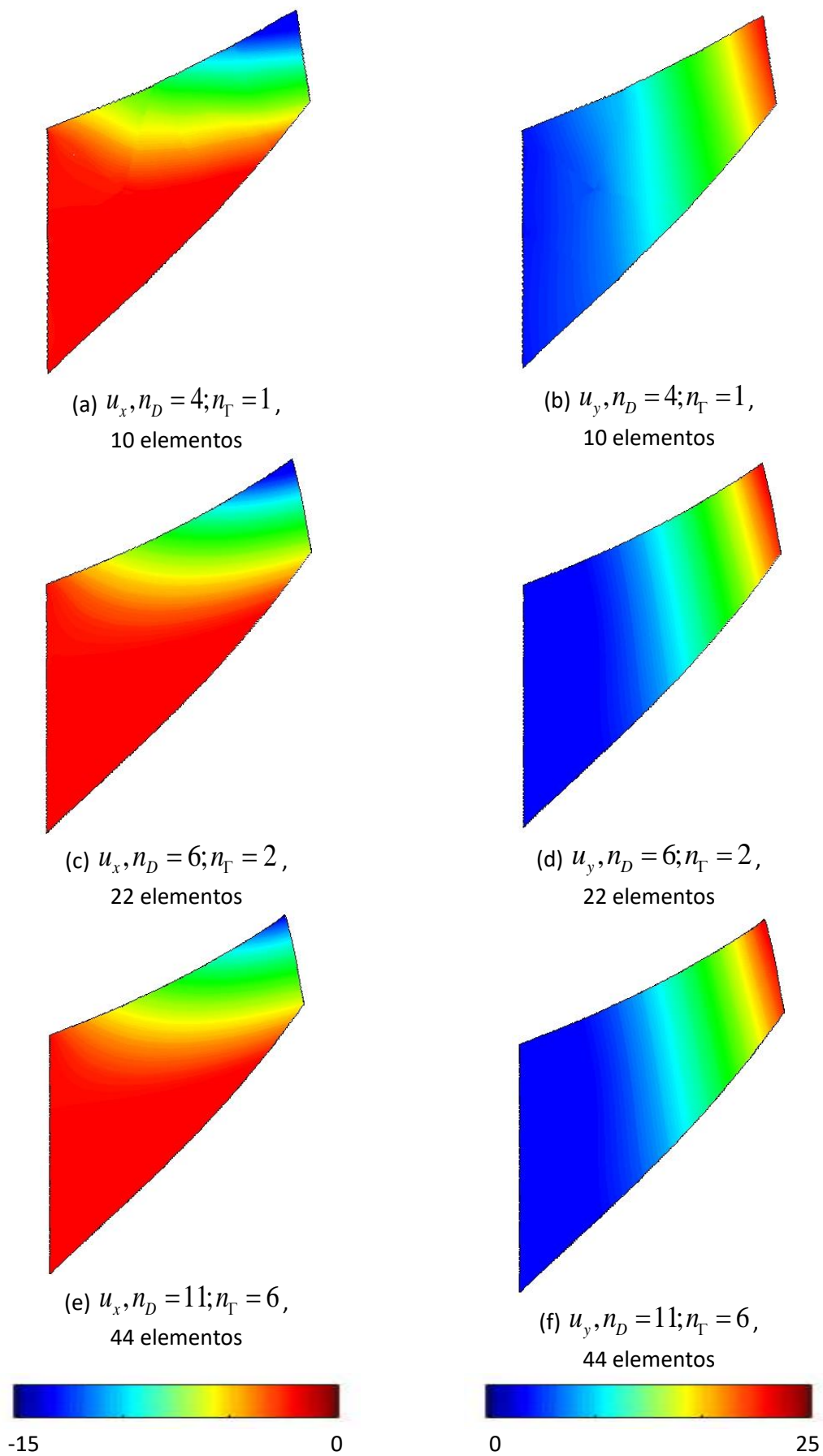


Figura 5.22: Painel de Cook: Campos de deslocamento.

5.3.3. Placa com orifício circular

Este caso de estudo, também retirado do trabalho de Souza [36], consta de uma placa de geometria rectangular, em estado plano de tensão, onde existe um orifício circular. Esta placa encontra-se encastrada na extremidade $X = 0$ e traccionada por uma carga horizontal $p = 10$ na extremidade oposta, em $X = 6a$.

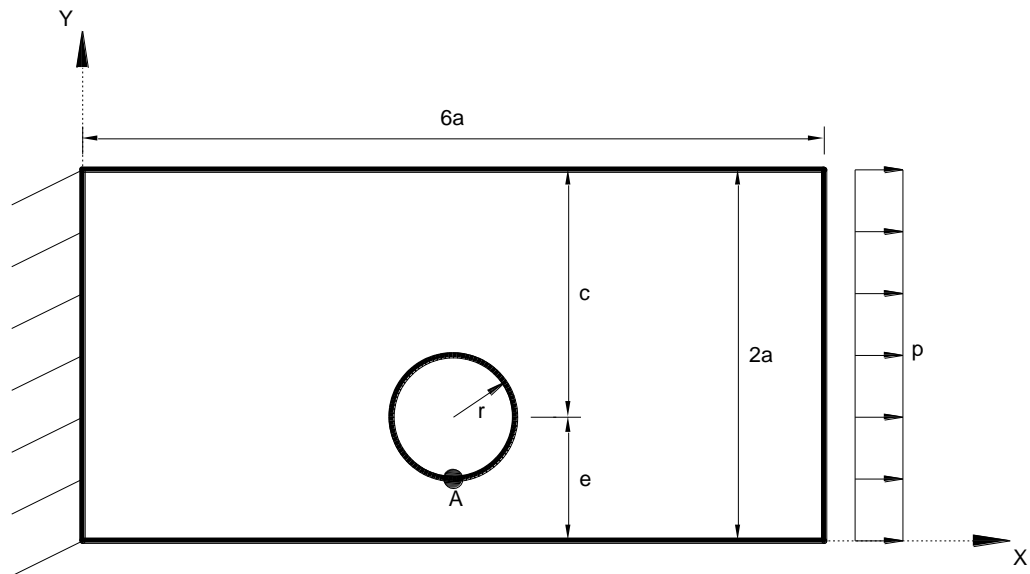


Figura 5.23: Placa com orifício circular.

Os parâmetros geométricos utilizados são $e = a = 20$, $c/e = 2$, $r = 10$ e as propriedades mecânicas do material considerado são, $E = 100$ e $\nu = 0,3$.

No artigo de Souza, o problema é resolvido utilizando o programa de elementos finitos convencionais ANSYS e um programa de elementos finitos híbridos-Trefftz de tensão. No modelo de elementos finitos convencionais, os autores utilizam 1278 elementos triangulares de seis nós com um total de 5428 graus de liberdade. No modelo de elementos finitos híbridos-Trefftz, utilizam 2462 graus de liberdade.

Os resultados apresentados por Souza dizem respeito à tensão normal σ_x no ponto A (60,10) e à energia de deformação do modelo. O valor da tensão no ponto A obtida pelo modelo de elementos finitos convencionais é $\sigma_A = 41,4$, ao passo que o valor obtido pelo modelo de elementos finitos híbridos-Trefftz é $\sigma_A = 41,0$. Os valores da energia de deformação obtidos pelos elementos convencionais e híbridos-Trefftz (de Souza) são $E_C = 417,6$ e $E_T = 413,23$, respectivamente.

No programa de elementos finitos híbridos-Trefftz desenvolvido neste trabalho utilizam-se, para a análise da placa com orifício circular, dois níveis de refinamento 'h', uma malha com 70 elementos e outra com 88, como representado na Figura 5.24.

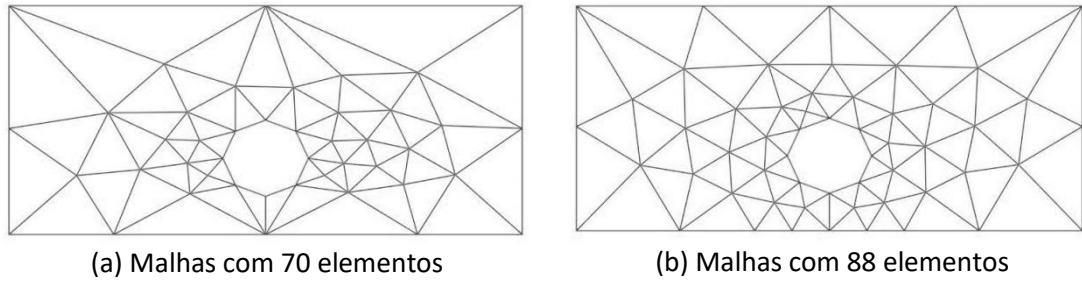


Figura 5.24: Placa com orifício circular: malhas de elementos finitos híbridos-Trefftz.

Como nos casos anteriores, para cada modelo aqui apresentado utilizaram-se também quatro níveis de refinamento 'p', fazendo variar as ordens das funções de aproximação do domínio e da fronteira entre $n_D = 4; n_T = 1$ e $n_D = 11; n_T = 6$.

De notar que devido às limitações do gerador automático de malha (secção 4.3.1.2), o orifício circular é representado como um polígono, ao contrário do trabalho desenvolvido por Souza. Esta imprecisão na modelação causa concentrações espúrias de tensões nos vértices do polígono, sobre-avaliando os seus valores na zona imediatamente adjacente ao orifício.

Na Figura 5.25 apresenta-se o gráfico que mostra a convergência da energia de deformação para os vários níveis de refinamentos 'h' e 'p'. Como nos outros casos, o eixo das abcissas apresenta o número de graus de liberdade e o das ordenadas a energia de deformação.

Com a análise do gráfico da Figura 5.25, conclui-se que a energia de deformação tende para o valor 411,4 para todos os modelos aqui testados. Comparando com os valores obtidos por Souza, esta energia apresenta uma diferença de 1.48% face ao modelo de elementos finitos convencionais, mas apenas 0,44% face aos elementos finitos híbridos-Trefftz formulados por aquele autor.

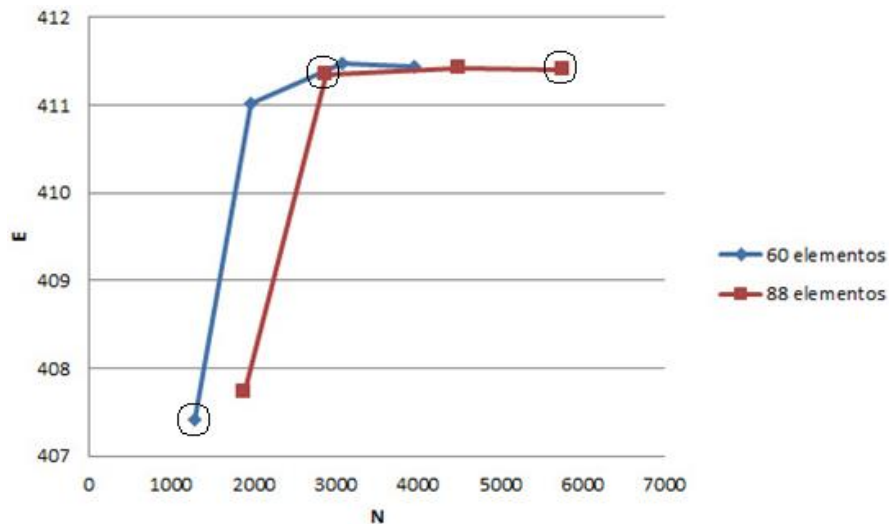


Figura 5.25: Placa com orifício circular: Energia de deformação (E) em função do número total de graus de liberdade (N) .

Assim, conclui-se que a formulação de elementos finitos híbridos-Trefftz apresentada neste trabalho, mesmo com os erros devido à modelação do orifício circular através de um octógono, obtêm uma estimativa da energia de deformação com um bom grau de precisão.

Nas Figura 5.26 e Figura 5.27 são apresentados os campos de tensões e deslocamentos para os níveis de refinamento assinalados na Figura 5.25, com o objectivo de, tal como nos casos anteriores, se poder avaliar visualmente a qualidade destes campos. Mais uma vez, essa qualidade é averiguada pela maneira como o modelo recupera a continuidade interelementar e as condições de fronteira impostas.

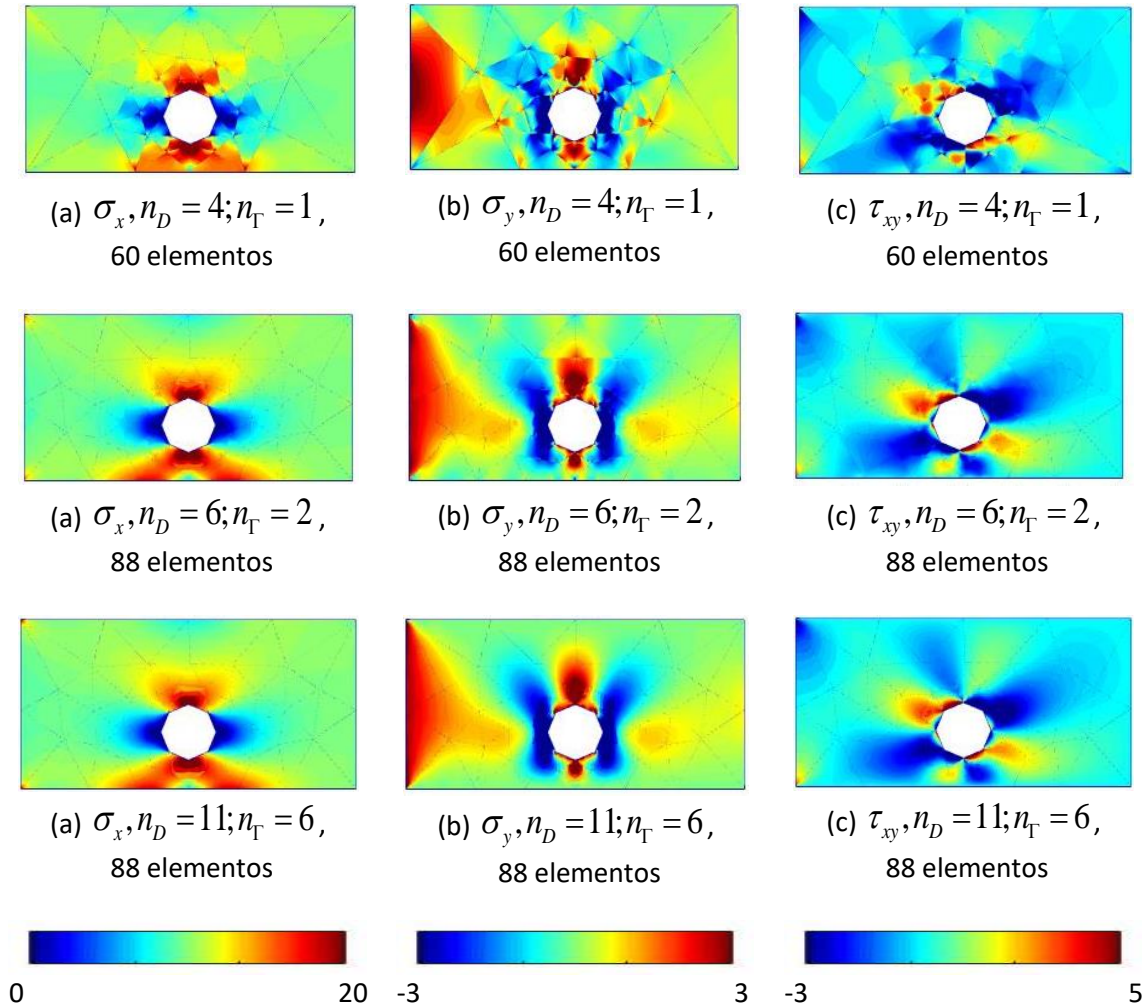


Figura 5.26: Placa com orifício circular: Campos de tensões.

Na análise das tensões, estas condições são, nomeadamente, $\sigma_y = 0$ em $X = 0$ e $X = 2a$, $\sigma_x = p$ em $X = 6a$ e $\tau_{xy} = 0$ em todas estas fronteiras.

No modelo menos refinado a continuidade interelementar apresenta consideráveis falhas entre os elementos, e as condições de fronteira são mal recuperadas. Contudo, estas melhoram progressivamente à medida que se refina o modelo, sendo que no caso mais refinado tanto a continuidade interelementar como as condições de fronteira já são bem recuperadas.

O efeito detrimental da aproximação da geometria circular através de um polígono é avaliado comparando a tensão σ_x no ponto A obtida por Souza utilizando uma descrição geométrica exacta com a obtida pelo programa aqui desenvolvido. A concentração espúria de tensões tem como consequência a obtenção de uma tensão (média) $\sigma_x = 50$ no ponto A . No entanto o valor obtido por Souza é recuperado a uma distância de apenas $0,04a$ do vórtice geométrico, o que demonstra que o efeito de imperfeição geométrica dissipa-se na sua imediata vizinhança.

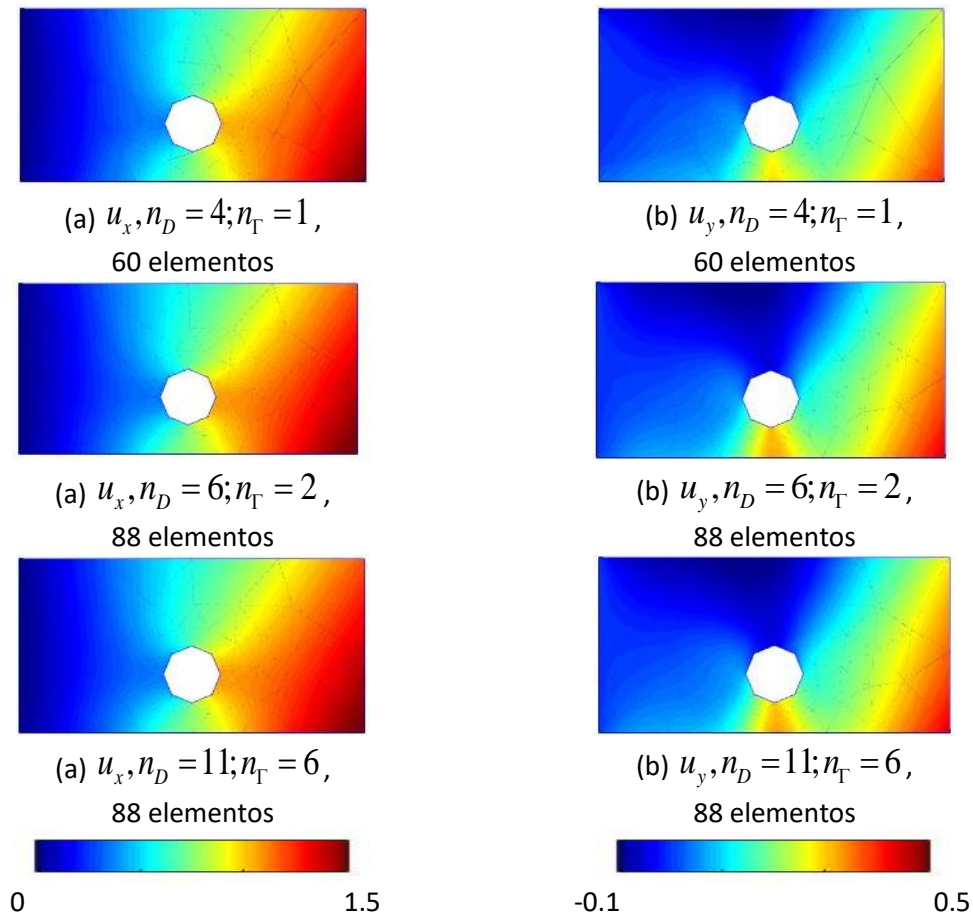


Figura 5.27: Placa com orifício circular: Campos de deslocamento.

Conclui-se através da análise da Figura 5.27, que as condições de fronteira cinemáticas são bem recuperadas, mais uma vez mesmo para os refinamentos mais baixos, isto é, tem-se $u_x = u_y = 0$ em $X = 0$, e não se notam discontinuidades interelementares.

No que diz respeito à continuidade do campo de deslocamentos, esta também é bem recuperada logo no modelo menos refinado.

Conclui-se, então, que mesmo com a modelação do orifício circular através de um polígono, o programa de elementos finitos híbridos-Trefftz consegue uma boa estimativa da solução do problema.

6. Conclusões e desenvolvimentos futuros

6.1. Conclusões

O presente trabalho teve como objectivo o desenvolvimento de uma ferramenta computacional, em ambiente Matlab, que utiliza a formulação híbrida-Trefftz no seu modelo de tensão para resolver problemas elastoestáticos de duas dimensões em estado plano de tensão ou de deformação.

De forma a validar o programa desenvolvido, este foi utilizado para analisar uma estrutura simples com solução analítica conhecida, posteriormente comparando também os resultados com os obtidos utilizando um programa de cálculo automático baseado em elementos conformes de deslocamento. Nesta validação foi verificado que o programa de elementos finitos híbridos-Trefftz conseguiu recuperar a solução analítica com uma precisão de 10^{-10} e que conseguiu bons resultados comparativamente ao programa de elementos finitos convencionais, que utilizou sete vezes mais graus de liberdade. Em particular, a representação dos campos de tensões utilizando os elementos finitos híbridos-Trefftz foi muito superior à obtida com elementos finitos convencionais, tanto ao nível de equilíbrio interelementar, como na recuperação de altos gradientes de tensões. Isto deve-se ao facto da informação contida nas bases de aproximação dos elementos finitos híbridos-Trefftz ser calibrada para cada problema individual, enquanto os elementos finitos convencionais utilizam sempre as mesmas bases de aproximação para todos os problemas. Contudo, a exigência das funções de aproximação das bases híbridas-Trefftz é superior em termos de esforço computacional. A utilização de elementos finitos híbridos-Trefftz leva também a sistemas resolventes mais instáveis, onde geralmente é necessário aplicar pré-condicionadores.

Após a validação completa, o programa de elementos finitos híbridos-Trefftz foi testado aplicando-o a três casos de estudo mais complexos. Estes testes tiveram como objectivo analisar a influência dos refinamentos 'p' e 'h' na convergência das soluções. Com esta análise concluiu-se que o refinamento 'p' é mais eficaz que o 'h' dado que na análise dos diversos gráficos o declive da curva da diminuição do erro do primeiro é maior que do segundo. Contudo, a melhor estimativa da solução é sempre obtida com o uso de ambos os refinamentos em simultâneo. A convergência foi também avaliada através da análise visual dos campos de soluções, onde foi analisada tanto a continuidade interelementar, como a recuperação das condições de fronteira impostas. Desta análise, foi observado que à medida que se refina o modelo quer a continuidade interelementar, quer as condições de fronteira impostas são bem recuperadas.

6.2. Desenvolvimentos futuros

Dando por completo o trabalho desta dissertação, existe ainda bastante potencial para desenvolvimentos futuros relacionado com o tema abordado. Com base na ferramenta computacional desenvolvida é possível tornar o programa mais completo através dos seguintes pontos,

- Adaptação das formulações híbridas-Trefftz para análise de problemas de elasticidade tridimensional;
- Adaptação das formulações híbridas-Trefftz para análise dinâmica de problemas bidimensionais e/ou tridimensionais;
- Implementação de procedimentos de refinamento 'p' adaptativos para facilitar a utilização da plataforma computacional;
- Implementação de uma interface gráfica para a aplicação estrutural desenvolvida.

Bibliografia

- [1] J. Freitas, J. Almeida e E. Pereira, "Non-conventional formulations for the finite element method," *Computational Mechanics*, vol 23, pp. 488-501, 1999.
- [2] I. D. Moldovan e J. Freitas, "Hybrid-Trefftz displacement and stress elements for bounded poroelasticity problems," *Computers and Geotechnics*, vol. 42, pp. 129-144, 2012.
- [3] R. Cournt, "Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations," *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 49, pp. 1-23, 1943.
- [4] M. Turner, R. Clough, H. Martin e L. Topp, "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures," *J. of Aero. Sci.*, 23 (9), pp. 805-823, 1956.
- [5] R. W. Clough, "The Finite Element Method in Plane Stress Analysis," *Proc 2d ASCE Conf Electronic Computation.*, 1960.
- [6] O. Zienkiewicz, "The Finite Element Method in Engineering Science," em *McGraw Hill*, 1971.
- [7] J. Synge, "Triangulation in the Hypercircle Method for Plane Problems," *Proc. R. Irish Acad.*, Vol. 54, pp. 341-367, 1952.
- [8] R. Bank e T. Dupont, "An Optimal Order Process for Solving Finite Element Equations," *Mathematics of Computation*, vol. 36, nº153, pp. 35-51, 1981.
- [9] O. Zienkiewicz e D. Phillips, "An automatic mesh generation scheme for plane and curved surfaces by 'isoparametric' co-ordinates," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 3, pp. 519-528, 1971.
- [10] M. Piteri, "Geração automática de malhas hierárquico-adaptativas em domínios bidimensionais e tridimensionais," *Tese Doutorado, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica Lisboa*, 1998.
- [11] E. Trefftz, "Ein gegenstück zum ritzschen verfahren," *2nd International Congress on Applied Mechanics*, p. 131-137, 1926.
- [12] J. Jirousek, "Basis for development of large finite elements locally satisfying all field equations," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 14, nº 1, pp. 65-92, 1978.
- [13] A. Zielinsk e O. Zienkiewicz, "Generalized finite element analysis with T-complete boundary solution functions," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*,

vol.21, nº3, 1985.

- [14] I. Herrera, "Boundary methods: A criterion for completeness," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol.77, nº8, pp. 4395-4398, 1980.
- [15] W. Jin, Y. Cheung e O. Zienkiewicz, "Application of the Trefftz method in plane elasticity problems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.30, nº 6, pp. 1147-1161, 1990.
- [16] V. Leitão, "Applications of multi-region Trefftz-collocation to fracture mechanics," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol.22, nº3, pp. 251-256, 1998.
- [17] J. Jirousek e L. Guex, "The hybrid-Trefftz finite element model and its application to plate bending," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 23, nº4, pp. 651-693, 1986.
- [18] J. Jirousek e M. Diaye, "Solution of orthotropic plates based on p-extension of the hybrid-Trefftz finite element model," *Computers and Structures*, vol. 34, nº1, pp. 51-62, 1990.
- [19] J. Jirousek, A. Wroblewski, Q. Qin e X. He, "A family of quadrilateral hybrid-Trefftz p-elements for thick plate analysis," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 38, nº15, pp. 315-344, 1995.
- [20] J. Freitas, "Formulation of elastostatic hybrid-Trefftz stress elements," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol.153, nº1, p. 127-151, 1998.
- [21] J. Freitas, C. Cismasiu e Z. Wang, "Comparative analysis of hybrid-Trefftz stress and displacement elements," *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol.6, nº 1, pp. 35-39, 1999.
- [22] J. Freitas e F. Bussamra, "Three-dimensional hybrid-Trefftz stress elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.47, nº5, pp. 927-950, 2000.
- [23] F. Bussamra, P. Pimenta e J. Freitas, "Hybrid-Trefftz stress elements for three-dimensional elastoplasticity," *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, vol. 8, pp. 235-246, 2001.
- [24] J. Freitas e Z. Wang, "Elastodynamic analysis with hybrid stress finite elements," *Computers & Structures*, vol. 79, pp. 1753-1767, 2001.
- [25] J. Freitas e C. Cismasiu, "Hybrid-Trefftz displacement element for spectral analysis of bounded and unbounded media," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, pp. 671-699, 2003.
- [26] J. Freitas e I. D. Moldovan, "Hybrid-Trefftz stress element for bounded and unbounded poroelastic media," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 85,

no. 10, pp. 1280-1305, 2011.

- [27] J. Freitas, I. Moldovan e C. Cismasiu, "Hybrid-Trefftz displacement element for bounded and unbounded poroelastic media," *Computational Mechanics*, vol. 48, pp. 659-673, 2011.
- [28] J. Freitas, "Mixed finite element solution of time-dependent problems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, pp. 3657-3678, 2008.
- [29] I. Moldovan, D. Cao e J. Freitas, "Hybrid-Trefftz elements for biphasic elastostatics," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 66, pp. 68-82, 2013.
- [30] J. Jirousek e P. Teodorescu, "Large finite elements method for the solution of problems in the theory of elasticity," *Computers & Structures* vol 15, pp. 575-587, 1982.
- [31] C. Cismasiu, "The hybrid-Trefftz displacement elemento for static and dynamic structural analysis problems," *Tese Doutorado, Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal*, 2000.
- [32] I. Piltner, "Special finite elements with holes and internal cracks," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.21, nº8, 1985.
- [33] MathWorks. MATLAB from mathworks. www.mathworks.com.
- [34] V. Silva, "Elementos finitos híbridos-Trefftz de deslocamento para problemas de elasticidade plana," *Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Lisboa, Portugal*, 2016.
- [35] M. Shephard, Q. Niue e P. Baehmann, "Some results using stress projectors for error indication and estimation," *Adaptive Methods for Partial Differential Equations*, pp. 83-99, 1989.
- [36] C. Souza e S. Proença, "A hybrid-Trefftz formulation for plane elasticity with selective enrichment of the approximations," *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol.27, nº5, pp. 785-804, 2009.
- [37] S. Timoshenko e J. Goodier, "Theory of Elasticity," em *McGraw-Hill*, 1951.
- [38] J. Freitas e C. Cismasiu, "Numerical implementation of hybrid-Trefftz displacement elements," *Computers & Structures*, vol. 73, pp. 207-225, 1999.
- [39] I. Moldovan e J. Freitas, "Hybrid-Trefftz displacement and stress elements for bounded poroelasticity problems," *Computers and Geotechnics*, vol. 42, pp. 129-144, 2012.